Erneuerungstheorie für Produkte von Zufallsmatrizen

Diplomarbeit
von

Sebastian Mentemeier

korrigierte Version, 17. November 2009

Betreut durch Prof. Dr. G. Alsmeyer
Institut für Mathematische Statistik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Furstenberg und Kesten [9] bewiesen 1960 folgenden Satz:

Satz von Furstenberg-Kesten
Für eine Folge unabhängig identisch verteilter Matrizen $(M_n)_{n\geq 1}$*, für die*

$$\mathbf{E}\left[\log^+ \|M_1\|\right] < \infty$$

gilt, existiert ein $\alpha \in [-\infty, \infty)$ *mit*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|M_1 \cdots M_n\| = \alpha \quad \mathbf{P}\text{-}f.s. \text{ und in } L_1(\mathbf{P}).$$

Beweis. [9], Theoreme 1 und 2. □

Die Konstante α wird als Ljapunov-Exponent der Folge $(M_n)_{n\geq 1}$ bezeichnet. Man kann den Satz von Furstenberg-Kesten als starkes Gesetz der großen Zahlen für Zufallsmatrizen ansehen.

In dieser Arbeit werden wir Bedingungen an die Verteilung der Zufallsmatrizen angeben, unter denen sich für Vektoren aus einer geeigneten Teilmenge $S \subset S^{d-1}$ die Konvergenzaussage zu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|xM_1 \cdots M_n\| = \alpha \quad \mathbf{P}\text{-}f.s.$$

für alle $x \in S$ verschärfen lässt.

Im Falle eines positiven Ljapunov-Exponenten $\alpha > 0$ ist dann für alle $x \in S$ die Folge $\|xM_1 \cdots M_n\|$ $\mathbf{P}$-*f.s.* divergent. Erinnern wir uns an die Erneuerungstheorie, so können wir – in Anlehnung an die Ergebnisse für transiente Random-Walks – vermuten, dass für jedes $h > 1$

$$\mathbf{E}\left[\#\{n \geq 0 : t < \|xM_1 \cdots M_n\| < t \cdot h\}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad \mathbf{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{(\log t, \log t + \log h)}(\log \|xM_1 \cdots M_n\|)\right] \\
&\overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \quad \alpha^{-1} \log h
\end{aligned}
$$

für alle $x \in S$ gilt. Dies kann als Blackwellsches Erneuerungstheorem für Zufallsmatrizen angesehen werden.

Noch näher liegt die Vermutung, dass für negativen Ljapunov-Exponenten $\alpha < 0$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left(\sup_{n\geq 1} \|xM_1 \cdots M_n\| > t\right) = 0$$

für alle $x \in S$ gilt.

Diese Resultate werden wir zum einen für positive Matrizen in Anlehnung an den grundlegenden Artikel von Kesten [11] beweisen, zum anderen für reguläre Matrizen mit teils neuen Methoden, teils auf dem Artikel von Le Page [15] und dem Buch von Bougerol und Lacroix [5] aufbauend. Das Buch [5] sei auch zum weitergehenden Studium empfohlen, allerdings werden dort andere Methoden als in dieser Arbeit angewendet.

Neben den erwähnten Arbeiten, wurde und wird von vielen Seiten in dieser Richtung geforscht, in jüngster Zeit z.B. von Klüppelberg und Pergamenchtchikov ([13], [14]). Eine umfangreiche Auflistung von Arbeiten über Produkte von Zufallsmatrizen und entsprechende Grenzwertsätze findet sich in dem bereits erwähnten Buch [5].

Wichtigstes Hilfsmittel wird für uns das Markov-Erneuerungstheorem, welches eine Verallgemeinerung des 2. Erneuerungstheorems auf Summen (in gewisser Weise) abhängig verteilter Zufallsgrößen darstellt, sein.

Mit einer Einführung in die Markov-Erneuerungstheorie, deren Hauptresultat eben das Markov-Erneuerungstheorem ist, wollen wir diese Arbeit beginnen. Ein detaillierter Überblick über den Aufbau dieser Arbeit wird anschließend in Kapitel 2 gegeben, wenn schon einige Grundbegriffe bekannt sind.

Ich danke Herrn Prof. Dr. G. Alsmeyer für den Vorschlag dieses vielseitigen und interessanten Themas, und seine geduldige Unterstützung und Betreuung bei der Erstellung dieser Arbeit. Und ich danke allen Freunden und Verwandten, dass sie durch Rat, Tat oder einfach gute Worte auf ihre Weise zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Die Korrekturen beziehen sich auf die Sätze 6.7, 6.8 und Bemerkung 6.10, und deren Anwendungen.

1. Markov-Erneuerungstheorie

1.1. Grundlegende Begriffe der Markov-Erneuerungstheorie

In der Markov-Erneuerungstheorie wird das Konzept des Random Walks dahingehend verallgemeinert, dass die Zuwächse nicht mehr unabhängig identisch verteilt sein müssen, sondern ihre Verteilung von den Zuständen einer Markov-Kette, der sogenannten Steuerkette, abhängen darf. Bedingt unter dieser Markov-Kette seien die Zuwächse jedoch wieder unabhängig verteilt. Solche Folgen $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ werden als *Markov-Random-Walk (MRW)* bezeichnet:

1.1 Definition (Markov-Random-Walk; vgl. [1], 9.1.1)
Sei $(X_n, U_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum $S \times \mathbb{R}$, $(S, \mathcal{S})$ ein meßbarer Raum mit abzählbar erzeugter σ-Algebra $\mathcal{S}$, und $P : S \times \mathcal{S} \otimes \mathcal{B} \to [0, 1]$ ein stochastischer Kern, so dass für alle $n \geq 0$, $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ die Borelsche σ-Algebra) gilt

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} \in A, U_{n+1} \in B \mid X_n, U_n\right) = P\left(X_n, A \times B\right) \quad \mathbb{P}\text{-}f.s.$$

Setze $V_n := U_0 + \ldots U_n$. Dann bezeichnen wir $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ als *Markov-Random-Walk*, und für $V_0 = 0$ als *Standard-Markov-Random-Walk*.
Im Falle $\mathbb{P}$-*f.s.* positiver U_n heißt $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ auch *Markov-Erneuerungsprozess*.

1.2 Folgerungen (vgl. [1], 9.1.2)
Für einen Markov-Random-Walk $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ gemäß Definition 1.1 gilt:

(a) $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ *ist eine Markov-Kette mit Übergangskern P^*, gegeben durch*

$$P^*((x, s), A \times B) := P\left(x, A \times (B - s)\right)$$

für alle $x, s \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{S}$ und $B \in B$.

(b) $(X_n)_{n\geq 0}$ *ist eine Markov-Kette mit Übergangskern P', gegeben durch*

$$P'(x, A) := P\left(x, A \times \mathbb{R}\right)$$

für alle $x \in \mathcal{S}$, $A \in \mathcal{S}$.

(c) Bedingt unter $(X_n)_{n\geq 0}$ sind $U_0, U_1, \ldots$ stochastisch unabhängig, und es gilt

$$\mathbb{P}\left(U_n \in B \mid (X_j, U_j)_{j\neq n}, X_n\right) = Q(X_{n-1}, X_n, B) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für alle $n \geq 1$, $B \in \mathcal{B}$ und einen Übergangskern $Q : S^2 \times \mathcal{B} \to [0,1]$.

1.3 Bemerkung
Folgerung (c) entspricht unserer obigen Ad-hoc-Definition eines Markov-Random-Walks. Tatsächlich sind (wenn $\mathcal{S}$ abzählbar erzeugt ist) beide Definitionen äquivalent: Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum S und Übergangskern P'. Zusätzlich sei $(U_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Zufallsgrößen, so dass für alle $n \geq 1$ Eigenschaft (c) gelte. Dann bildet (X_n, V_n) einen Markov-Random-Walk mit Übergangskern

$$P\left(x, A \times B\right) := \int_A P'(x, dy) Q(x, y, B)$$

für alle $x \in S$, $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{B}$.

Kesten [12] nutzt diese alternative Definition; allerdings ist bei ihm die Verteilung von U_n von den Zuständen X_n und X_{n+1} abhängig, und somit U_0 kein Startwert, sondern abhängig verteilte Zufallsgröße. Jedoch definiert er $V_n := \sum_{i=0}^{n-1} U_n$, so dass wir ohne Bedenken $\hat{U}_0 := 0$ und $\hat{U}_n := U_{n-1}$ setzen dürfen. Dann gilt $\hat{V}_n = V_n$ für alle $n \geq 0$, und $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ ist somit ein MRW.

Wir betrachten $(X_n, U_n)_{n\geq 0}$ im Folgenden und ohne explizite Erwähnung in einem Standardmodell:

1.4 Definition (Standardmodell)
Ein Standardmodell für $(X_n, U_n)_{n\geq 0}$ ist ein Modell

$$\left(\Omega, \mathcal{A}, (X_n, U_n)_{n\geq 0}, (\mathbb{P}_{(x,y)})_{(x,y)\in S\times\mathbb{R}}\right),$$

bestehend aus einem beliebigen meßbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ zusammen mit messbaren Abbildungen $(X_n, U_n) : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S \times \mathbb{R}, \mathcal{S} \otimes \mathcal{B})$ und einer Familie von W-Maßen, so dass $(X_n, U_n)_{n\geq 0}$ unter jedem $\mathbb{P}_{(x,y)}$ eine Markov-Kette mit Übergangskern P bildet; und

$$\mathbb{P}_{(x,y)}\left(X_0 = x, U_0 = y\right) = 1.$$

Für beliebige Startverteilungen λ auf $S \times \mathbb{R}$ setzen wir dann

$$\mathbb{P}_\lambda(\cdot) = \int_{S\times\mathbb{R}} \mathbb{P}_{(x,y)}(\cdot)\,\lambda(dx,dy).$$

Entsprechend bezeichne $\mathbb{E}_\lambda$ den Erwartungswert unter $\mathbb{P}_\lambda$; und gegeben $x \in S$ oder ein Maß ν auf S, schreiben wir kurz $\mathbb{E}_x$ für $\mathbb{E}_{(x,0)}$ bzw. $\mathbb{E}_\nu$ für $\mathbb{E}_{\nu\otimes\delta_0}$. $\mathbb{P}$ ohne Index taucht auf, wenn eine Eigenschaft unabhängig von der Startverteilung gilt ($\mathbb{P}$-*f.s.* bedeutet also $\mathbb{P}_{(x,y)}$-*f.s.* für alle $x \in S$, $y \in \mathbb{R}$).
Zumeist werden wir Standard-Markov-Random-Walks behandeln, wir nennen dann bereits

$$(\Omega, \mathcal{A}, (X_n, U_n)_{n\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in S}),$$

ein Standardmodell.
Schließlich bezeichne

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_j, U_j \ :\ 0 \ \leq j \leq n) \subset \mathcal{A}$$

die kanonische Filtration von $(X_n, U_n)_{n\geq 0}$, sowie

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty \stackrel{def}{=} \sigma(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n) = \sigma(X_j, U_j \ :\ j \geq 0) \subset \mathcal{A}.$$

Zusätzlich zu den bereits aus der Erneuerungstheorie bekannten Größen Erstaustrittzeit und Exzess, wird für Markov-Random-Walks auch ein Sprungprozess $Z(t)$ definiert, der angibt, in welchem Zustand sich die Steuerkette beim ersten Überschreiten von t befindet:

1.5 Definition

(a) *(Erstaustrittszeit)* Für $t \in \mathbb{R}$ setze

$$\tau(t) := \inf\{n \geq 1 \ :\ V_n > t\}.$$

(b) *(Sprungprozess, Exzess)* Auf dem Ereignis $\{\tau(t) < \infty\}$ definiere

$$\begin{aligned} Z(t) &:= X_{\tau(t)}, \\ R(t) &:= V_{\tau(t)} - t. \end{aligned}$$

(c) *(Erneuerungsmaß)* Für beliebige Startverteilung λ bezeichne

$$U_\lambda(\cdot) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_\lambda\left((X_n, V_n) \in \cdot\right);$$

sowie für messbare Abbildungen $g : S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g * U_\lambda(t) := \mathbb{E}_\lambda \left[\sum_{n=0}^{\infty} g(X_n, t - V_n) \right].$$

1.2. Das Markov-Erneuerungstheorem von Kesten

Gemeinsam ist allen Varianten des Markov-Erneuerungstheorems (für eine Übersicht siehe [1], Kapitel 9), dass sie die Stationarität der Steuerkette voraussetzen. Wir werden zuerst eine Version von Kesten ([12]) kennenlernen, welche explizit die Existenz einer stationären Verteilung fordert, und zusätzlich eine gewisse Stetigkeit in den Anfangsbedingungen. Dieses wird für den Fall positiver Matrizen benötigt, und von Kesten auch speziell dafür bewiesen. Im Fall der regulären Matrizen werden wir die von Alsmeyer ([2]) bewiesene Version nutzen, welche die Harris-Rekurrenz der Steuerkette voraussetzt.

Zunächst geben wir jedoch zwei Verallgemeinerungen des Begriffes der direkten Riemann-Integrierbarkeit für Markov-Random-Walks.

1.6 Definition (Direkt Riemann-integrierbar)
Setze $C_0 := \emptyset$, und für $k \geq 1$

$$C_k := \left\{ x \in S \ : \ \mathbb{P}_x \left(\frac{V_m}{m} \geq \frac{1}{k} \text{ für alle } m \geq k \right) \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

Eine messbare Abbildung $g : S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt direkt Riemann-integrierbar, falls für jedes $x \in S$ gilt:

$$g(x, \cdot) \text{ ist auf kompakten Intervallen Riemann-integrierbar, und} \tag{1.2.1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (k+1) \sup\{|g(x,t)| \ : \ x \in C_{k+1} \backslash C_k, \ l \leq t \leq l+1\} < \infty. \tag{1.2.2}$$

1.7 Folgerungen
Sei $g : S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ direkt Riemann-integrierbar. Dann gilt:

(a) *Die Funktion g ist, da auf kompakten Intervallen Riemann-integrierbar, $\boldsymbol{\lambda}$-f.ü. stetig nach dem Satz von Lebesgue.*

(b) Gilt $\bigcup_{k\geq 1} C_k = S$, so ist g beschränkt.

(c) Aus der notwendigen Bedingung für Summenkonvergenz folgt für $k \geq 1$

$$\lim_{|t|\to\infty} \sup_{x\in C_k} g(x,t) = 0.$$

Offenbar hängt die Klasse der direkt Riemann-integrierbaren Funktionen vom vorliegenden Markov-Random-Walk ab.
Unter der später im Markov-Erneuerungstheorem von Kesten geforderten Voraussetzung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} \equiv \alpha > 0 \quad \mathbb{P}\text{-}f.s.$$

gilt $\bigcup_{k\geq 1} C_k = S$; die Mengen $C_{k+1}\backslash C_k$ bilden also eine Partition von S. Somit kann

$$\hat{g}(x,t) := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sup\{|g(y,s)| \ : \ y \in C_{k+1}\backslash C_k,\ l \leq s \leq l+1\} \cdot \mathbb{1}_{(C_{k+1}\backslash C_k)\times[l,l+1]}(x,t)$$

als obere „Treppenfunktion" zu $|g|$ angesehen werden. Den in der Definition (1.2.2) auftauchenden Faktor $(k+1)$ rechtfertigt das folgende

1.8 Lemma
Seien C_k wie oben definiert, $x \in S$, $t \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^+$ und $k \geq 0$ beliebig. Dann gilt

$$U_x(C_k \times [t, t+b]) = E_x \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n\in C_k, V_n\in[t,t+b]\}} \leq 2(k+1+kb). \tag{1.2.3}$$

Beweis. siehe Anhang, A.16. □

Bedingung (1.2.2) impliziert also die gleichmäßige Beschränktheit von $g * U_x(t)$ unabhängig von der Wahl von x und t.

In der zweiten Version des Markov-Erneuerungstheorems werden wir nur folgende, schwächere Definition der direkten Riemann-Integrierbarkeit benötigen:

1.9 Definition (π-direkt Riemann-integrierbar)
Eine meßbare Funktion $g : S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nennen wir π-direkt-Riemann-integrierbar, π ein Maß auf S, wenn $t \mapsto g(x,t)$ λ-f.ü. stetig ist für π-fast alle $x \in S$, und

$$\int_S \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sup_{l\delta\leq t\leq(l+1)\delta} |g(x,t)| \right) \pi(dx) < \infty \tag{1.2.4}$$

für ein $\delta > 0$.

Hier wird also die klassische direkte Riemann-Integrierbarkeit von $g(x, \cdot)$ für π-fast alle $x \in S$ gefordert sowie die Existenz des im Markov-Erneuerungstheorem auftauchenden Grenzwertes

$$\int_S \int_{\mathbb{R}} g(y,s) \lambda\!\!\lambda(ds)\pi(dy).$$

Offenbar wird diese Bedingung von (1.2.2) impliziert.

Bevor wir nun das Markov-Erneuerungstheorem von Kesten formulieren können, benötigen wir noch drei Begriffe für Markov-Random-Walks: *nichtarithmetisch*, *schwach nichtarithmetisch* und *stetig in den Anfangsbedingungen*. Schwach nichtarithmetisch ist, wie der Name schon andeutet, in gewisser Weise eine Verallgemeinerung des Begriffes nichtarithmetisch, muss jedoch von diesem abgegrenzt werden (für ein Beispiel siehe Anhang, A.5). Die Stetigkeit in den Anfangsbedingungen ist hingegen eine spezielle Eigenschaft von MRW, die in etwa besagt, dass sich die Wahrscheinlichkeiten (bzw. Erwartungswerte) nicht stark ändern, wenn wir den Startzustand der Steuerkette leicht variieren. Was aber bedeutet leicht variieren? Nun, das Markov-Erneuerungstheorem von Kesten gilt nur für Steuerketten auf metrischen Räumen:

Von nun an sei S ein separabler metrischer Raum mit Abstandsfunktion d und $\mathcal{S}$ die zugehörige Borelsche (= von den offenen Mengen erzeugte) σ-Algebra.

1.10 Definition und Satz

Für $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = (x_i, v_i)_{i \geq 0} \in \prod_{i=0}^{\infty}(S \times \mathbb{R})$ setze

$$B_\varepsilon^n(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := \left\{ (y_i, w_i)_{i \geq 0} \in \prod_{i=0}^{\infty}(S \times \mathbb{R}) \; : \; d(x_i, y_i) + |v_i - w_i| < \varepsilon \text{ für } i \leq n \right\}.$$

Für eine beschränkte, messbare Abbildung $f : \prod_{i=0}^{\infty}(S \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$f_n^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := \sup_{(\mathbf{y}, \mathbf{w}) \in B_\varepsilon^n} f(\mathbf{y}, \mathbf{w}),$$

$$f^\varepsilon := \lim_{n \to \infty} f_n^\varepsilon.$$

Dann ist f_n^ε messbar für alle $n \geq 0$, und damit auch f^ε als monotoner Limes.

Beweis.

Zunächst sind f_n^ε und f^ε wohl definiert, da f beschränkt ist. Insbesondere $f_0^\varepsilon \equiv \|f\|_\infty$.

Weiterhin ist für jedes $c \in \mathbb{R}$

$$\{f_n^\varepsilon > c\} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \ : \ \exists\, (\mathbf{y}, \mathbf{w}) \in B_\varepsilon^n(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \text{ mit } f(\mathbf{y}, \mathbf{w}) > c\}$$

eine offene Menge, also messbar. □

1.11 Definition

Sei $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ ein Markov-Random-Walk auf (S, d), π eine Verteilung auf S.

(a) $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ heißt *d-arithmetisch (bzgl π)*, falls $d > 0$ die größte reelle Zahl ist, für die eine messbare Abbildung $f : S \to [0, d)$ existiert, so dass

$$\mathbb{P}\left(V_1 \in f(x) - f(y) + d\mathbb{Z} \mid X_0 = x, X_1 = y\right) = 1$$

für $\mathbb{P}_\pi^{(X_0,X_1)}$-fast alle $(x, y) \in S^2$; 0-arithmetisch, falls für jedes $d > 0$ obige Eigenschaft gilt; und nichtarithmetisch sonst.

(b) Wir nennen $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ *schwach nichtarithmetisch (bzgl. π)*, falls gilt:
Es gibt eine Menge $\{\zeta_i \ : \ i \in I\} \subset \mathbb{R}$, I endlich oder abzählbar, so dass die von $\{\zeta_i \ : \ i \in I\}$ erzeugte Gruppe dicht in $\mathbb{R}$ liegt, und folgende Eigenschaft erfüllt ist:
Für jedes ζ_i und jedes $\delta > 0$ existiert ein $y = y(\zeta_i, \delta) \in S$, so dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt:
Es gibt ein $A \in \mathcal{S}$ mit $\pi(A) > 0$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ und ein $z \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in A$

$$\mathbb{P}_x\left(d(X_{m_1}, y) < \varepsilon,\ |V_{m_1} - z| \leq \delta\right) > 0,$$

$$\mathbb{P}_x\left(d(X_{m_2}, y) < \varepsilon,\ |V_{m_2} - z - \zeta_i| \leq \delta\right) > 0.$$

(c) Wir nennen $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ *stetig in den Anfangsbedingungen*, falls:
Für alle $x \in S$, $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$, so dass für alle beschränkten messbaren Abbildungen $f : \prod_{i=0}^\infty (S \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ und alle $y \in S$ mit $d(x, y) < \delta$ gilt:

$$\mathbb{E}_x\left[f((X_n, V_n)_{n\geq 0})\right] \leq \mathbb{E}_y\left[f^\varepsilon((X_n, V_n)_{n\geq 0})\right] + \varepsilon\|f\|_\infty,$$

$$\mathbb{E}_y\left[f((X_n, V_n)_{n\geq 0})\right] \leq \mathbb{E}_x\left[f^\varepsilon((X_n, V_n)_{n\geq 0})\right] + \varepsilon\|f\|_\infty.$$

1.12 Bemerkung

Für $A \in \mathcal{S}$ folgt mit $f = \mathbb{1}_A(x_1)$ aus (c) – dabei ist f als Funktion auf $\prod_{i=0}^\infty (S \times \mathbb{R})$ zu verstehen–, dass für y nahe genug bei x

$$\mathbb{P}_x\left(X_1 \in A\right) \leq \mathbb{P}_y\left(X_1 \in B_\varepsilon(A)\right) + \varepsilon,$$

$$\mathbb{P}_y\left(X_1 \in A\right) \leq \mathbb{P}_x\left(X_1 \in B_\varepsilon(A)\right) + \varepsilon.$$

Beachte, dass nicht $\mathbb{P}_y\left(X_1 \in A\right)$ abgeschätzt wird, sondern nur $\mathbb{P}_y\left(X_1 \in B_\varepsilon(A)\right)$.

Nun können wir das Markov-Erneuerungstheorem formulieren, dies wird in Anlehnung an Kesten [12] in zwei Teilen geschehen.

1.13 Satz (Markov-Erneuerungstheorem, Teil 1)
Gegeben ein Standard-Markov-Random-Walk $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$, seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

1. *Es gebe eine stationäre Verteilung π für $(X_n)_{n\geq 0}$, so dass für alle $x \in S$*

$$\mathbb{P}_x\left(X_n \in A \textit{ für ein } n \in \mathbb{N}\right) = 1$$

   für alle offenen $A \in \mathcal{S}$ mit $\pi(A) > 0$ gilt.

2. *V_1 sei integrierbar bzgl. $\mathbb{P}_\pi$, $\alpha := \mathbb{E}_\pi V_1 > 0$ und*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} \equiv \alpha \quad \mathbb{P}\text{-}f.s.$$

3. *$(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ sei schwach nichtarithmetisch bzgl. π.*

4. *$(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ sei stetig in den Anfangsbedingungen.*

Dann gilt für jede stetige und direkt Riemann-integrierbare Funktion $g : S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und jedes $x \in S$:

$$\lim_{t\to\infty} g * U_x(t) = \alpha^{-1} \int_S \int_{\mathbb{R}} g(y, s)\lambda(ds)\pi(dy). \tag{1.2.5}$$

Beweis. siehe [12], Theorem 2. □

Für den zweiten Teil seien $\sigma_0^> := 0$ und

$$\sigma_n^> := \inf\{k > \sigma_{n-1}^> \;:\; V_k > V_{\sigma_{n-1}^>}\},\; n \geq 1,$$

die streng aufsteigenden Leiterindizes. Unter der Voraussetzung $\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} > 0$ $\mathbb{P}$-*f.s.* sind alle Indizes $\mathbb{P}$-*f.s.* endlich, und

$$(X_n^>, V_n^>)_{n\geq 0} := (X_{\sigma_n^>}, V_{\sigma_n^>})_{n\geq 0}$$

bildet wieder einen Markov-Random-Walk mit zugehörigem Übergangskern

$$P^{>}(x, A \times B) = \mathbb{P}_x \left(X_{\sigma_1^>} \in A, V_{\sigma_1^>} \in B \right).$$

1.14 Satz (**Markov-Erneuerungstheorem, Teil 2**)
Unter den Voraussetzungen von 1.13 gilt: Es existiert ein endliches Maß $\pi^>$ auf S, das stationär für den oben definierten MRW $(X_n^*, V_n^*)_{n\geq 0}$ ist; und für jede beschränkte und stetige Funktion $f : S \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ und jedes $x \in S$ gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x \left[f(Z(t), R(t)) \mathbb{1}_{\{\tau(t)<\infty\}} \right] = \alpha^{-1} \int\limits_S \int\limits_{S\times(0,\infty)} \int\limits_{[0,z)} f(v, w)\, \lambda(dw)\, P^{>}(y, dv\times dz)\pi^{>}(dy). \tag{1.2.6}$$

Beweis. siehe [12], Theorem 1 und Lemma 2. □

1.3. Ergänzende Sätze zum Markov-Erneuerungstheorem

Die Voraussetzungen des Markov-Erneuerungstheorems lassen sich in gewisser Weise abschwächen: die $\mathbb{P}$-*f.s.*-Konvergenz von $\frac{V_n}{n}$ gegen eine Konstante α folgt aus den übrigen Voraussetzungen, wenn man zusätzlich annimmt, dass ein toplogisch rekurrentes $x^* \in S$ existiert.

Da die Existenz einer stationären Verteilung π für $(X_n)_{n\geq 0}$ angenommen wird und aus den Eigenschaften eines MRW direkt folgt, dass auch $(U_n)_{n\geq 0}$ stationär unter $\mathbb{P}_\pi$ ist, liefert der Ergodensatz sofort die $\mathbb{P}_\pi$-*f.s.*-Konvergenz von $\frac{V_n}{n}$. Hauptaufgabe ist es also, die Konvergenz für *alle* $x \in S$ zu zeigen, sowie die Konstanz des Grenzwertes. Dabei spielt die Stetigkeit in den Anfangsbedingungen eine entscheidende Rolle.

Dass auf diese (oder eine ähnliche Voraussetzung) nicht verzichtet werden kann, zeigt folgendes Beispiel: Es sei $S = S_+$ die Menge der Vektoren aus S^{d-1} mit nichtnegativen Einträgen. Die Markov-Kette (X_n) entstehe durch sukzessive Multiplikation des Startvektors x mit einer festen, (strikt) positiven Matrix M und anschließender Normierung.

Wie wir aus der Perron-Frobenius-Theorie wissen, konvergiert dann $(X_n)_{n\geq 0}$ gegen den positiven Eigenvektor b zum betraglich größten Eigenwert. Somit ist b offenbar topologisch rekurrent. Nun können wir aber auch U_n deterministisch festlegen, und zwar als 1, falls $X_n \neq b$, und 0, falls $X_n = b$. Dann ist $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ offenbar nicht stetig in den

Anfangsbedingungen. Außerdem gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} = \begin{cases} 0 & \mathbb{P}_b\text{-}f.s. \\ 1 & \mathbb{P}_x\text{-}f.s. \text{ für alle } x \neq b. \end{cases}$$

In diesem Fall ist der Grenzwert also nicht für alle Startvektoren gleich.

Dieses Beispiel zeigt zugleich, dass die Steuerkette unter den Voraussetzungen des Erneuerungstheorems von Kesten nicht φ-irreduzibel sein muß. $\varphi = \delta_b$ scheidet als Kandidat aus, da unter allen anderen Startvektoren nur Konvergenz gegen b vorliegt, $\{b\}$ also nie erreicht wird. Wählt man ein Maß φ, das auf einer offenen Umgebung U von b Masse trägt, so muss auch $\varphi(U\backslash N)>0$ gelten - wobei $N = \{x, xM, xM^2, \dots\}$ den Pfad eines beliebigen Vektors $x \neq b$ bezeichnet - da $b \in U\backslash N$. Andererseits wird $U\backslash N$ unter $\mathbb{P}_x$ niemals aufgesucht.

1.15 Satz

Sei $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ ein Standard-MRW, der stetig in den Anfangsbedingungen ist, π eine stationäre Verteilung für $(X_n)_{n\geq 0}$ und $\mathbb{E}_\pi[|V_1|] < \infty$. Es gebe ein $x^* \in S$ mit

$$\mathbb{P}_x\left(|X_n - x^*| < \varepsilon \textit{ unendlich oft}\right) = 1$$

für alle $\varepsilon > 0$ und alle $x \in S$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} \equiv \alpha = \mathbb{E}_\pi[V_1] \quad \mathbb{P}\text{-}f.s. \tag{1.3.1}$$

Beweis. Der Beweis wird in mehreren Schritten erfolgen:
Zunächst folgern wir aus dem Ergodensatz die $\mathbb{P}_\pi$-*f.s.* Konvergenz von $\frac{V_n}{n}$. Um diese auf alle $x \in S$ ausdehnen zu können, zeigen wir für ein $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}_{x^*}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} \text{ existiert und ist gleich } \alpha\right) = 1,$$

woraus mittels der Stetigkeit in den Anfangsbedingungen die Gültigkeit für eine δ-Umgebung von x^* folgt. Da x^* topologisch rekurrent ist, durchläuft $\mathbb{P}$-fast jeder Pfad $\frac{V_n}{n}(\omega)$ diese Umgebung unendlich oft; und wir erhalten mit der starken Markoveigenschaft

$$\mathbb{P}_x\left(\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} \text{ existiert und ist gleich } \alpha\right) = 1$$

für alle $x \in S$. Schließlich werden wir zeigen, dass $\alpha = \mathbb{E}_\pi[V_1]$.

1.Schritt : $\mathbb{P}_\pi$-f.s. Konvergenz von $\frac{V_n}{n}$

Nach 1.2 gilt, da π stationäre Verteilung für $(X_n)_{n\geq 0}$ ist,

$$\mathbb{P}_\pi\left(U_1 \in B\right) = \iint\limits_{S\times S} \pi(dx)P^{'}(x,dy)Q(x,y,B) = \iint\limits_{S\times S} Q(x,y,B)\mathbb{P}_\pi^{(X_0,X_1)}(dx,dy)$$
$$= \iint\limits_{S\times S} Q(x,y,B)\mathbb{P}_\pi^{(X_n,X_{n+1})}(dx,dy) = \mathbb{P}_\pi\left(U_{n+1} \in B\right)$$

für alle $B \in \mathcal{B}$, $n \geq 0$; $(U_n)_{n\geq 1}$ ist also stationär unter $\mathbb{P}_\pi$. Weiterhin ist nach Voraussetzung $\mathbb{E}\left[|U_1|\right] = \mathbb{E}\left[|V_1|\right] < \infty$, also lässt sich der Birkhoff'sche Ergodensatz A.15 auf die Folge $(U_n)_{n\geq 1}$ anwenden. Wir erhalten

$$\frac{V_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i \to \mathbb{E}_\pi\left[U_1|\mathcal{J}\right] \quad \mathbb{P}_\pi\text{-}f.s.$$

Dabei interessiert uns zunächst nur die Existenz des Grenzwertes, wir haben also

$$\mathbb{P}_x\left(\liminf_{n\to\infty}\frac{V_n}{n} = \limsup_{n\to\infty}\frac{V_n}{n}\right) = 1 \tag{1.3.2}$$

für π- fast alle $x \in S$.

2.Schritt : Konvergenz von $\frac{V_n}{n}$ unter $\mathbb{P}_{x^*}$

Allerdings wissen wir noch nicht, ob (1.3.2) auch für x^* gilt, denn x^* kann unter π Masse 0 besitzen.

Wir wissen nur, dass für jede Umgebung A von x^* gilt $\pi(A) > 0$, denn: Der Punkt x^* ist topologisch rekurrent, deshalb gilt für alle $x \in S$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{1}_A(X_i) = \infty \quad \mathbb{P}_x\text{-}f.s.; \text{ und damit } \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{1}_A(X_i) = \infty \quad \mathbb{P}_\pi\text{-}f.s.$$

Nun bildet $(\mathbb{1}_A(X_i))_{i\geq 0}$ wieder einen stationären Prozess unter P_π, und mit dem Satz von der monotonen Konvergenz erhalten wir

$$\infty = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_\pi\left[\sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_A(X_i)\right] = \lim_{n\to\infty}(n+1)\cdot\mathbb{P}_\pi\left(X_0 \in A\right);$$

dies kann aber nur erfüllt sein, wenn $\pi(A) = \mathbb{P}_\pi\left(X_0 \in A\right) > 0$ ist.

Diese Tatsache benötigen wir im folgenden Widerspruchsbeweis:

Annahme: $\mathbb{P}_{x^*}\left(\liminf_{n\to\infty}\frac{V_n}{n} < \limsup_{n\to\infty}\frac{V_n}{n}\right) > 0$

Nach Annahme gibt es also ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\mathbb{P}_{x^*}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{V_n}{n} - \liminf_{n\to\infty}\frac{V_n}{n} > 4\varepsilon\right) > 0.$$

Dann kann ein $r \in \mathbb{Q}$ gewählt werden , so dass nach eventueller Verkleinerung von ε gilt

$$\mathbb{P}_{x^*}\left(\liminf_{n\to\infty}\frac{V_n}{n} \leq r - 2\varepsilon < r + 2\varepsilon \leq \limsup_{n\to\infty}\frac{V_n}{n}\right) > 2\varepsilon. \tag{1.3.3}$$

Definiere nun die messbaren Funktionen $f, g : \prod_{i=0}\infty(S \times \mathbb{R}) \to [0,1]$ durch

$$f((\mathbf{x},\mathbf{v})) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \liminf_{n\to\infty}\frac{V_n}{n} \leq r - 2\varepsilon \text{ und } \limsup_{n\to\infty}\frac{V_n}{n} \geq r + 2\varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

$$g((\mathbf{x},\mathbf{v})) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \liminf_{n\to\infty}\frac{V_n}{n} \leq r - \varepsilon \text{ und } \limsup_{n\to\infty}\frac{V_n}{n} \geq r + \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Gemäß der Definition (1.10) von f^ε gilt $f^\varepsilon \leq g$. Nutzen wir die, dass $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ stetig in den Anfangsbedingungen ist, dann erhalten wir ein $\delta > 0$, so dass für alle $y \in B_\delta(x^*)$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_y\left(\liminf_{n\to\infty}\frac{V_n}{n} \leq r - \varepsilon < r + \varepsilon \leq \limsup_{n\to\infty}\frac{V_n}{n}\right) \\
= \quad & \mathbb{E}_y\left[g\left((X_n, V_n)_{n\geq 0}\right)\right] \\
\geq \quad & \mathbb{E}_y\left[f^\varepsilon\left((X_n, V_n)_{n\geq 0}\right)\right] \\
\geq \quad & \mathbb{E}_{x^*}\left[f\left((X_n, V_n)_{n\geq 0}\right)\right] - \varepsilon\|f\|_\infty \\
= \quad & \mathbb{P}_{x^*}\left(\liminf_{n\to\infty}\frac{V_n}{n} \leq r - 2\varepsilon < r + 2\varepsilon \leq \limsup_{n\to\infty}\frac{V_n}{n}\right) - \varepsilon \\
\overset{(1.3.3)}{>} \quad & \varepsilon.
\end{aligned}$$

Das bedeutet

$$\mathbb{P}_y\left(\liminf_{n\to\infty}\frac{V_n}{n} = \limsup_{n\to\infty}\frac{V_n}{n}\right) < 1 - \varepsilon$$

für alle $y \in B_\delta(x^*)$. Nach oben Gezeigtem ist aber $\pi(B_\delta(x^*)) > 0$, was einen Widerspruch zur $\mathbb{P}_\pi$-*f.s.* Existenz des Grenzwertes liefert.

Also haben wir

$$\mathbb{P}_{x^*}\left(\liminf_{n\to\infty}\frac{V_n}{n} = \limsup_{n\to\infty}\frac{V_n}{n}\right) = 1.$$

3.Schritt : Es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}_{x^*}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} = \alpha\right) = 1$
Auch dies zeigen wir mit einem Widerspruchsbeweis, dazu

Annahme: $\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{n}$ ist nicht $\mathbb{P}_{x^*}$-*f.s.* konstant.
Nach Annahme gibt es dann $r \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ mit

$$\mathbb{P}_{x^*}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} \le r - 2\varepsilon\right) \ge 2\varepsilon,$$
$$\mathbb{P}_{x*}\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} \ge r + 2\varepsilon\right) \ge 2\varepsilon.$$

Setzt man wieder

$$f_1((\mathbf{x},\mathbf{v})) = \begin{cases} 1 & \limsup_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} \le r - 2\varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$
$$g_1((\mathbf{x},\mathbf{v})) = \begin{cases} 1 & \limsup_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} \le r - \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$
$$f_2((\mathbf{x},\mathbf{v})) = \begin{cases} 1 & \liminf_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} \ge r + 2\varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$
$$g_2((\mathbf{x},\mathbf{v})) = \begin{cases} 1 & \liminf_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} \ge r + \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

so gilt $f_1^\varepsilon \le g_1$ und $f_2^\varepsilon \le g_2$. Da $(X_n, V_n)_{n\ge 0}$ stetig in den Anfangsbedingungen ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $y \in B_\delta(x^*)$

$$\mathbb{P}_y\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} \le r - \varepsilon\right) = \mathbb{E}_y\left[g_1\left((X_n, V_n)_{n\ge 0}\right)\right] \ge \mathbb{E}_y\left[f_1^\varepsilon\left((X_n, V_n)_{n\ge 0}\right)\right]$$
$$\ge \mathbb{E}_{x^*}\left[f_1\left((X_n, V_n)_{n\ge 0}\right)\right] - \varepsilon\|f\|_\infty = \mathbb{P}_{x^*}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} \le r - 2\varepsilon\right) - \varepsilon \ge \varepsilon.$$

Analog erhalten wir mit f_2 und g_2, dass

$$\mathbb{P}_y\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} \ge r + \varepsilon\right) \ge \varepsilon \tag{1.3.4}$$

für alle $y \in B_\delta(x^*)$.

Setze nun

$$\tau := \inf\{n \geq 1 \ : \ X_n \in B_\delta(x^*)\}.$$

Aufgrund der topologischen Rekurrenz ist τ $\mathbb{P}$-*f.s.*-endlich, und es gilt mit der starken Markov-Eigenschaft, dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x\left(\liminf_{n\to\infty}\frac{V_n}{n} \geq r+\varepsilon\right) &= \int \mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty}\frac{V_n}{n} \geq r+\varepsilon \mid \mathcal{F}_\tau\right) \mathrm{d}\mathbb{P}_x \\
&= \int \mathbb{P}_{X_\tau}\left(\liminf_{n\to\infty}\frac{V_n}{n} \geq r+\varepsilon\right) \mathrm{d}\mathbb{P}_x \\
&\geq \int \varepsilon \quad \mathrm{d}\mathbb{P}_x = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ganz analog erhalten wir

$$\mathbb{P}_x\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{V_n}{n} \leq r-\varepsilon\right) = 1$$

für alle $x \in S$, und damit einen Widerspruch zur π-fast sicheren Konvergenz von $\frac{V_n}{n}$.

4.Schritt : $\mathbb{P}_x\left(\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{n} = \alpha\right) = 1$ für alle $x \in S$

Für beliebiges $\varepsilon > 0$ kann aufgrund der Stetigkeit in den Anfangsbedingungen ein $\delta > 0$ gewählt werden, so dass für alle $y \in B_\delta(x^*)$

$$\mathbb{P}_y\left(\alpha-\varepsilon \leq \liminf_{n\to\infty}\frac{V_n}{n} \leq \limsup_{n\to\infty}\frac{V_n}{n} \leq \alpha+\varepsilon\right) \geq 1-\varepsilon$$

gilt, und analog zum 3. Schritt können wir mit der starken Markoveigenschaft aus der topologischen Rekurrenz von x^*

$$\mathbb{P}_x\left(\alpha-\varepsilon \leq \liminf_{n\to\infty}\frac{V_n}{n} \leq \limsup_{n\to\infty}\frac{V_n}{n} \leq \alpha+\varepsilon\right) = 1$$

für alle $x \in S$ folgern. Da ε beliebig gewählt war, haben wir nun

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{n} = \alpha \ \ \mathbb{P}\text{-}f.s.,$$

und wir müssen nur noch den Wert von α bestimmen.

5.Schritt : $\alpha = E_\pi V_1$

Dies folgt aber direkt aus der Konstanz des Grenzwertes: Nach dem Ergodensatz A.15

gilt auch L_1-Konvergenz, also insbesondere

$$\alpha = \mathbb{E}_\pi[\alpha] = \mathbb{E}_\pi\left[\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{n}\right] = \mathbb{E}_\pi[\mathbb{E}_\pi[U_1|\mathcal{J}]] = \mathbb{E}_\pi[U_1] = \mathbb{E}_\pi[V_1].$$

$\square$

1.16 Korollar
Es seien die Voraussetzungen von Satz 1.15 erfüllt, allerdings sei nur $\mathbb{E}_\pi\left[V_1^+\right] < \infty$ *gefordert. Dann gilt immer noch*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{n} \equiv \alpha = \mathbb{E}_\pi[V_1] \quad \mathbb{P}\text{-}f.s.,$$

allerdings kann $\alpha = -\infty$ *sein.*

Beweis. Im Fall $\mathbb{E}_\pi\left[V_1^-\right] < \infty$ ist nichts zu zeigen; ansonsten teile V_i für alle $i \geq 1$ in V_i^+ und V_i^- auf.
Nach Voraussetzung ist $\mathbb{E}_\pi\left[V_1^+\right] < \infty$, also gilt nach Satz 1.15

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V_n^+}{n} = \mathbb{E}_\pi\left[V_1^+\right] < \infty \ \mathbb{P}\text{-}f.s.$$

Für $a > 0$ betrachte die gestutzten Zufallsgrößen

$$V_n^{-a} = \begin{cases} V_n^- & \text{für } V_n^- \leq a \\ 0 & \text{für } V_n^- > a \end{cases}.$$

Diese Zufallsgrößen sind offensichtlich integrierbar, da beschränkt, und es gilt wieder nach 1.15

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{V_n^-}{n} \geq \lim_{n\to\infty}\frac{V_n^{-a}}{n} = \mathbb{E}_\pi\left[V_1^{-a}\right].$$

Der Übergang $a \to \infty$ liefert zusammen mit (1.3.5) die Behauptung. $\square$

1.4. Das Markov-Erneuerungstheorem für Harris-rekurrente Steuerketten

Das folgende Markov-Erneuerungstheorem gilt auch auf allgemeineren Zustandsräumen, es genügt zu forden, dass $(S, \mathcal{S})$ ein messbarer Raum mit abzählbar erzeugter σ-Algebra $\mathcal{S}$ ist.

Wir rekapitulieren zunächst die wichtigsten Fakten über Harris-rekurrente Markov-Ketten.

1.17 Definition
Eine Markov-Kette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum S heißt Harris-rekurrent, falls ein $\gamma \in (0,1]$, $l \geq 1$, eine Rekurrenzmenge $\mathfrak{R}$, d.h. $\mathbb{P}_x(X_n \in \mathfrak{R} \text{ u.o.})$ für alle $x \in S$, und ein W-Maß φ auf S existieren, so dass $\varphi(\mathfrak{R}) = 1$ und

$$P^l(x,\cdot) \geq \gamma\varphi \quad \text{für alle } x \in \mathfrak{R}. \tag{1.4.1}$$

Kann $l = 1$ gewählt werden, so heißt $(X_n)_{n\geq 0}$ außerdem *streng aperiodisch*.

Auf Harris-rekurrente Markov-Ketten lassen sich viele der für diskrete Markov-Ketten gewonnenen Ergebnisse übertragen, da für sie ebenfalls eine zyklische Zerlegung existiert. Diese erhält man grob gesprochen dadurch, dass, wenn X_n in die Rekurrenzmenge $\mathfrak{R}$ eintritt, gemäß einer $B(1,\gamma)$-verteilten, von X_n unabhängigen Zufallsgröße ermittelt wird, ob X_{n+1} gemäß φ generiert wird. Ist dies der Fall, so beginnt ein neuer Zyklus (für Details siehe [1], Kapitel 8). Die zugehörigen Stoppzeiten (T_n) sind $\mathbb{P}$-*f.s.*-endlich und unter $\mathbb{P}_\varphi$ unabhängig identisch verteilt. Gilt sogar $\mathbb{E}_\varphi[T_1] < \infty$, so heißt $(X_n)_{n\geq 0}$ *positiv Harris-rekurrent.*

1.18 Satz (Hauptsatz über Harris-rekurrente Markov-Ketten)
Für eine Harris-rekurrente Markov-Kette $(X_n)_{n\geq 0}$ gelten folgende Aussagen:

(a) $(X_n)_{n\geq 0}$ *besitzt ein bis auf skalares Vielfaches eindeutig bestimmtes stationäres Maß ξ, das durch*

$$\xi(A) := \mathbb{E}_\varphi\left[\sum_{n=0}^{T_1-1} \mathbb{1}_{\{X_n\in A\}}\right]$$

für alle $A \in \mathcal{S}$ gegeben ist, und genau dann endlich ist, wenn $(X_n)_{n\geq 0}$ positiv Harris-rekurrent ist. In diesem Fall bezeichnet $\pi := \frac{\xi}{\xi(S)}$ die eindeutig bestimmte stationäre Verteilung.

(b) Für jede Startverteilung λ, jedes $x \in S$ sowie für alle $A \in \mathcal{S}$ mit $\xi(A) < \infty$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}_\lambda(X_n \in A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} P(x,A) = \pi(A),$$

wobei im Fall $\xi(S) = \infty$, wir π als das Nullmaß interpretieren.

(c) Ist $(X_n)_{n\geq 0}$ positiv Harris-rekurrent, so gilt für jede π-integrierbare Funktion $f: S \to \mathbb{R}$, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k) = \mathbb{E}_\pi \left[f(X_1) \right] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.},$$

also das starke Gesetz der großen Zahlen für die Folge $(f(X_k))_{k\geq 1}$.

(d) Ist f in der obigen Situation zusätzlich beschränkt, so gilt für jede Startverteilung λ und jedes $x \in S$, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_\lambda \left[f(X_k) \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_x \left[f(X_k) \right] = \mathbb{E}_\pi \left[f(X_1) \right].$$

Beweis. Die Aussagen $(a), (b)$ und (d) finden sich in Satz 8.3.1, Satz 8.3.2 und Korollar 8.3.4 in [1]. Aussage (c) enstammt Satz 17.0.1 in [16]. □

1.19 Bemerkung

Es sei an dieser Stelle bereits auf Satz A.7 im Anhang verwiesen. Dort wird gezeigt, dass eine Markov-Kette auf kompaktem Zustandsraum, welche die schwache Feller-Eigenschaft besitzt, stets eine stationäre Verteilung hat, welche man als schwachen Limes von

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} P\left(x, A\right)$$

erhält, wobei $x \in S$ beliebig ist, und verschiedene x durchaus zu unterschiedlichen Verteilungen führen können. Ist die Kette jedoch zugleich Harris-rekurrent, so folgt die Eindeutigkeit dieser stationären Verteilung, und insbesondere die *positive* Harris-Rekurrenz der Kette. Da dieser Fall später vorliegen wird, formulieren wir das Markov-Erneuerungstheorem direkt für positiv rekurrente Steuerketten.

1.20 Satz (Markov-Erneuerungstheorem für Harris-rekurrente Steuerketten)

Sei $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ ein nichtarithmetischer Markov-Random-Walk mit positiv Harris-rekurrenter Steuerkette $(X_n)_{n\geq 0}$. Bezeichne π die eindeutig bestimmte stationäre Verteilung für $(X_n)_{n\geq 0}$, und

$$\alpha := \mathbb{E}_\pi \left[V_1 \right] \quad \in (0, \infty].$$

Dann gilt für jede π-direkt Riemann-integrierbare Funktion g

$$\lim_{t\to\infty} g * U_x(t) = \alpha^{-1} \int_S \int_R g(y,s) \lambda\!\!\lambda(ds) \pi(dy) \tag{1.4.2}$$

für π-fast alle $x \in S$, sowie insbesondere

$$\lim_{t\to\infty} U_x(A \times t + I) = \alpha^{-1}\pi(A)\lambda\!\!\lambda(I) \tag{1.4.3}$$

für π-fast alle $x \in S$. Desweiteren gilt für jede stetige und beschränkte Funktion $f : S \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, dass

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x\left[f(Z(t),R(t))\mathbb{1}_{\{\tau(t)<\infty\}}\right] = \frac{1}{\alpha^{>}}\int\limits_S \int\limits_{S\times(0,\infty)} \int\limits_{[0,z)} f(v,w)\boldsymbol{\lambda}(dw)P^{>}(u,dv\times dz)\pi^{>}(du) \tag{1.4.4}$$

für π-fast alle $x \in S$. Dabei bezeichnet $P^{>}$ wie im Abschnitt zuvor den zum MRW $(X_n^{>}, V_n^{>})$ gehörenden Übergangskern. $(X_n^{>})_{n\geq 0}$ ist positiv Harris-rekurrent, und $\pi^{>}$ bezeichnet die zugehörige stationäre Verteilung, sowie $\alpha^{>} := \mathbb{E}_{\pi^{>}}[V_1^{>}]$.

Beweis. Dieser Satz ist das Hauptresultat von [2]. $\square$

2. Überblick

Definition eines Markov-Random-Walks

Mit Kenntnis der Markov-Erneuerungstheoreme kann nun ein Überblick über die angestrebten Resultate und den Weg dorthin gegeben werden. Wie in der Einleitung beschrieben, interessieren wir uns für das Erneuerungsmaß der Folge $(\log \|xM_1 \cdots M_n\|)_{n\geq 0}$ im Falle positiver und im Falle regulärer Matrizen. Darum liegt es nahe, als Zuwächse die Folge

$$\begin{aligned} U_0 &:= 0, \\ U_n &:= \log \|xM_1 \cdots M_n\| - \log \|xM_1 \cdots M_{n-1}\| \end{aligned}$$

für $n \geq 1$ zu wählen. Wie muss nun die Steuerkette $(X_n)_{n\geq 0}$ gewählt werden, damit wir einen Markov-Random-Walk erhalten?

Schreiben wir dazu

$$U_n = \log \left\| \left(\frac{xM_1 \cdots M_{n-1}}{\|xM_1 \cdots M_{n-1}\|} \right) M_n \right\|,$$

so sehen wir, dass die Verteilung von U_n nur von der Richtung $X_{n-1} \in S^{d-1}$ des Vektors $xM_1 \cdots M_{n-1}$; und der Verteilung von M_n abhängt. Da die Matrizen als unabhängig identisch verteilt vorausgesetzt wurden, hängt die Verteilung des so gewählten stochastischen Prozesses (X_n, U_n), bedingt unter $\mathcal{F}_n$, tatsächlich nur von X_{n-1} ab. Wir haben also einen Markov-Random-Walk gefunden, auf den wir das Erneuerungstheorem anwenden können - sofern die notwendigen Voraussetzungen erfüllt sind.

Nachweis der Anwendbarkeit der Erneuerungstheoreme

Eine zentrale Voraussetzung (bei beiden Erneuerungstheoremen) ist die Existenz eines topologisch rekurrenten Punktes (bzw. einer Rekurrenzmenge). Dazu werden wir fordern, dass mit positiver Wahrscheinlichkeit eine Folge von Matrizen realisiert wird, die kontraktiv wirkt, d.h. $xM_1 \cdots M_n$ konvergiert unabhängig vom Startvektor x, gegen einen festen Vektor b. Diese Situation liegt beispielsweise vor, wenn alle Matrizen skalare Vielfache einer Matrix mit strikt positiven Einträgen sind, dann konvergiert $xM_1 \cdots M_n$ gegen deren Frobenius-Eigenvektor.

Allerdings sind hier zwei Einschränkungen zu machen: Zum einen werden die $(M_n)_{n\geq 1}$ selten scharf als skalare Vielfache einer einzigen Matrix realisiert werden – mit diesem Problem setzen wir uns im Beweis von Lemma 3.11 auseinander. Zum anderen muss die Auswahl der Startvektoren eingeschränkt werden, da aus $xM_1 \cdots M_n \to b$ in jedem Fall $(-x)M_1 \cdots M_n \to (-b)$ folgen würde, und der Zustandsraum in zwei Klassen zerfallen würde.

Deswegen werden wir im Fall positiver Matrizen nur Startvektoren mit nichtnegativen Einträgen zulassen, und im Fall regulärer Matrizen als Zustandsraum $S^{d-1}_{/\pm}$ wählen, das ist die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^d$, auf der gegenüberliegende Punkte (also im obigen Fall b und $-b$) identifiziert werden.

Die weiteren Voraussetzungen werden sich oft als Folgerung aus der speziellen Form des Übergangskernes P beweisen lassen, wobei für den Nachweis der Stetigkeit in den Anfangsbedingungen explizit die Positivtät der Matrizen genutzt wird; für den Nachweis der Harris-Rekurrenz hingegen die Existenz einer $\lambda\!\!\lambda$-stetigen Komponente in der Verteilung von $M_1 \cdots M_n$ für geeignetes $n \in \mathbb{N}$.

Ergebnisse für $\alpha > 0$

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathbb{P}_x)_{x\in S})$ ein Standardmodell für $(X_n, U_n)_{n\geq 0}$, und $\mathbf{P}$ ein Maß, unter dem $(M_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von unabhängig identisch verteilten Zufallsmatrizen bildet. Dann folgt, wenn die Voraussetzungen erfüllt sind, aus dem Markov-Erneuerungstheorem für Harris-Ketten zum Beispiel direkt, dass für $h > 1$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\left[\#\{n \geq 0 \ : \ t \leq \|xM_1 \cdots M_n\| \leq th\}\right] \\
=&\lim_{(\log t)\to\infty} \mathbf{E}\left[\#\{n \geq 0 \ : \ \log t \leq \log \|xM_1 \cdots M_n\| \leq \log t + \log h\}\right] \\
=&\lim_{(\log t)\to\infty} U_x(S \times (\log t) + [0, \log h]) \\
=&\alpha^{-1}\ \pi(S)\ \lambda\!\!\lambda([0, \log h]) = \alpha^{-1} \log h
\end{aligned}
$$

für π-fast alle $x \in S$.

Ergebnisse für $\alpha < 0$

Definiere für $t > 0$ und $x \in S$ die Stoppzeit

$$\tau_x(t) := \inf\{n \geq 1 : \log \|xM_1 \cdots M_n\| > t\}.$$

Kestens geniale Erkenntnis war, dass

$$\{\tau_x(t) < \infty\} = \{\sup_{n\geq 1} \log \|xM_1 \cdots M_n\| > t\}.$$

Werfen wir einen Blick in den zweiten Teil beider Erneuerungstheoreme, so sehen wir, wenn wir dort $f \equiv 1$ setzen, tatsächlich eine Konvergenzaussage für die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}_x\left(\tau(t) < \infty\right).$$

Es „fehlt“ offenbar noch ein x am τ, und außerdem sind die Voraussetzungen des Markov-Erneuerungstheorems gar nicht erfüllt, denn dort wird $\alpha > 0$ gefordert (wir werden später zeigen, dass der Ljapunov-Exponent aus dem Satz von Furstenberg-Kesten mit $\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{n}$ übereinstimmt). Deswegen führen wir transformierte W-Maße ein:

Sei einmal angenommen, es gäbe eine Funktion $r : S \to (0, \infty)$ und ein $\varkappa > 0$, mit denen wir die W-Maße $(\mathbb{P}_x)_{x\in S}$ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ so definieren können, dass

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_x\left[f(X_0, V_0, X_1, V_1, \ldots, X_n, V_n)\right]\\ =&\frac{1}{r(x)}\mathbf{E}\left[f(x, 0, (xM_1)^\sim, \log \|xM_1\|, \ldots, (x\Pi_n)^\sim, \log \|x\Pi_n\|)e^{\varkappa \log \|x\Pi_n\|}r((x\Pi_n)^\sim)\right].\end{aligned}$$

gelten würde, wobei $(M_n)_{n\geq 1}$ unter $\mathbf{P}$ eine unabhängig identisch verteilte Folge bildet; und $(x)^\sim = \frac{x}{\|x\|}$ bezeichnet. Weiterhin sei angenommen, dass (X_n, V_n) unter $(\mathbb{P}_x)_{x\in S}$ die Voraussetzungen eines Markov-Erneuerungstheorems erfüllten.

Die Funktion $f : S \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(y, s) := \frac{1}{r(y)} e^{-\varkappa s}$$

ist stetig und beschränkt. Mit den Erneuerungstheoremen folgt dann

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x\left[f(Z(t), R(t))\mathbb{1}_{\{\tau(t)<\infty\}}\right] =: K(f);$$

mit $K(f) > 0$.

Andererseits erinnern wir uns nun daran, welche Annahme wir über die W-Maße $(\mathbb{P}_x)_{x\in S}$ gemacht haben, und können wie folgt umformen

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left[f(Z(t),R(t))\mathbb{1}_{\{\tau(t)<\infty\}}\right]\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}_x\left[f(X_n,V_n-t)\mathbb{1}_{\{\tau(t)=n\}}\right]\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}_x\left[\tfrac{1}{r(X_n)}e^{-\varkappa V_n+\varkappa t}\mathbb{1}_{\{\tau(t)=n\}}\right]\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r(x)}\mathbf{E}\left[\tfrac{1}{r((x\Pi_n)^{\sim})}e^{-\varkappa\log\|x\Pi_n\|}e^{\varkappa t}\,r((x\Pi_n)^{\sim})\,\|x\Pi_n\|^{\varkappa}\,\mathbb{1}_{\{\tau_x(t)=n\}}\right]\\
=&\frac{e^{\varkappa t}}{r(x)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{\tau_x(t)=n\}}\right]\\
=&\frac{e^{\varkappa t}}{r(x)}\ \mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{\tau_x(t)<\infty\}}\right]\\
=&\frac{e^{\varkappa t}}{r(x)}\ \mathbf{P}\left(\sup_{n\geq 1}\ \log\|xM_1\cdots M_n\|>t\right).
\end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir also

$$\lim_{t\to\infty}\frac{e^{\varkappa t}}{r(x)}\ \mathbf{P}\left(\sup_{n\geq 1}\ \log\|xM_1\cdots M_n\|>t\right)=K(g).$$

Durch Übergang von t zu $\log t$ erhalten wir schließlich das angekündigte Resultat samt Konvergenzrate, da nach Annahme an die Funktion r der Wert $K(g)r(x)$ echt positiv ist:

$$\lim_{t\to\infty}t^{\varkappa}\ \mathbf{P}\left(\sup_{n\geq 1}\ \|xM_1\cdots M_n\|>t\right)=K(g)\cdot r(x).$$

Diese letzte Herleitung mag auch als Rechtfertigung für diesen Überblick gelten, da sie einige der nachfolgenden, auf den ersten Blick unnötig erscheinenden Rechnungen, motivieren wird.

Gliederung dieser Arbeit

Wir wenden uns nun zunächst den positiven Matrizen zu. In Kapitel 3 wird ein kanonisches Modell definiert, das auch zur Verwendung mit transformierten W-Maßen geeignet ist, und in diesem Modell werden die Voraussetzungen des Kestenschen Markov-Erneuerungstheorems nachgewiesen. In Kapitel 4 werden Ergebnisse im Falle eines positiven Ljapunov-Exponenten abgeleitet, und im Kapitel 5 Ergebnisse im Falle eines negativen Ljapunov-Exponenten, wie die oben nachgewiesenen Konvergenzraten. Die Hauptarbeit besteht offenbar darin, die Existenz von r und $\varkappa$ zu zeigen.

Anschließend werden wir uns den regulären Matrizen zuwenden. Dort können einige Beweisschritte aus den ersten Kapiteln übernommen werden. In Kapitel 6 wird dafür ein kanonisches Modell definiert, und anschließend die Harris-Rekurrenz der Steuerkette nachgewiesen, sowie das Markov-Erneuerungstheorem im Fall eines positiven Ljapunov-Exponenten angewendet. Kapitel 7 schließlich widmet sich dem Fall des negativen Ljapunov-Exponenten und dem Nachweis der Existenz von r und $\varkappa$ in dieser Situation.

3. Grundlagen für positive Matrizen

3.1. Modellierung

Wie angekündigt, werden wir zuerst ein allgemeines Modell definieren, in dem wir arbeiten wollen. Um den später benötigten transformierten W-Maßen Rechnung zu tragen, werden wir das Modell abhängig von einer Funktion r und einer Zahl $\varkappa \geq 0$ definieren.

Notation
Für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$ bezeichnet

$$\tilde{x} := (x)^{\sim} := \frac{x}{\|x\|} \in S^{d-1}$$

den zugehörigen Einheitsvektor. Für Matrizen $M_1, \ldots, M_n$ bezeichnen wir ihr Produkt mit $\Pi_n := M_1 \cdots M_n$. Alle auftauchenden Vektoren sind – soweit nicht explizit erwähnt – Zeilenvektoren. Spaltenvektoren schreiben wir als transponierte Zeilenvektoren a^t.

Mit $\mathbf{P}$ soll stets das W-Maß bezeichnet werden, unter dem $(M_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von unabhängig identisch gemäß $\mathbf{P}^{M_1}$ verteilten Zufallsmatrizen ist. Wir haben im Überblick gesehen, dass wir transformierte W-Maße benötigen werden, deshalb wird die Familie $(\mathbb{P}_x)_{x\in S}$ abhängig von r und $\varkappa$ definiert, außerdem soll $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$ gelten. Um $\mathbf{P}$ und $(\mathbb{P}_x)_{x\in S}$ auf einem gemeinsamen W-Raum konsistent definieren zu können, benennen wir die der Folge $(M_n)_{n\geq 1}$ zugrundeliegende Verteilung kurzzeitig mit μ.

3.1 Definition

(a) Eine abgeschlossene Teilmenge $S \subset S^{d-1}$ heißt *invariant* unter $\mathbf{P}$ bzw. unter μ, wenn

$$\mu\left(\{M \ : \ xM = 0 \text{ oder } (xM)^{\sim} \notin S\}\right) = \mathbf{P}\left(xM_1 = 0 \text{ oder } (xM_1)^{\sim} \notin S\right) = 0$$

für alle $x \in S$ gilt.

(b) Sei S invariant unter $\mathbf{P}$ bzw. μ. Ein Paar $(r, \varkappa)$, bestehend aus einer Zahl $\varkappa \geq 0$ und einer stetigen Abbildung $r : S \to (0, \infty)$ heißt *maßdefinierend*, wenn für alle $x \in S$

gilt, dass

$$r(x) = \int \mu(dM) \|xM\|^{\varkappa} r((xM)^{\sim}) = \mathbf{E}\left[\|xM_1\|^{\varkappa} r((xM_1)^{\sim})\right]. \tag{3.1.1}$$

Beachte, dass aus der Abgeschlossenheit von S bereits folgt, dass $(S, \|\cdot\|)$ einen vollständigen metrischen Raum bildet. Das Paar $(\mathbb{1}, 0)$ ist für jedes S maßdefinierend.

3.2 Definition und Satz (Modell $\mathfrak{M}$)
Gegeben sei eine Verteilung μ auf $(M(d \times d, \mathbb{R}), \mathcal{M})$; $\mathcal{M}$ die Borelsche σ-Algebra.
S sei eine unter μ invariante Menge mit zugehöriger Borelscher σ-Algebra $\mathcal{S}$. Es sei ein maßdefinierendes Paar $(r, \varkappa)$ gegeben. Definiere

$$\begin{aligned}
\Omega :=& S \times \prod_{i=1}^{\infty} M(d \times d, \mathbb{R}) \\
\mathcal{A} :=& \mathcal{S} \otimes \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{M} \\
(X_0, (M_n)_{n\geq 1}) :=& \mathrm{id}_{\Omega}.
\end{aligned}$$

Für jedes $x \in S$ existiert dann ein W-Maß $\mathbb{P}_x$ auf Ω, für dass gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x\left(A \times D_1 \times \dots \times D_n \times M(d \times d, \mathbb{R})^{\infty}\right) = \\
&\delta_x(A) \cdot \frac{1}{r(x)} \int_{D_1 \times \dots \times D_n} \!\!\!\cdots \int \mu(dM_1) \dots \mu(dM_n) \|x\Pi_n\|^{\varkappa} r((x\Pi_n)^{\sim})
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

für alle $n \geq 0, A \in \mathcal{S}, D_1, \dots, D_n \in \mathcal{M}$.
Das so definierte Modell

$$\mathfrak{M} := \left(\Omega, \mathcal{A}, (X_0, (M_n)_{n\geq 1}), (\mathbb{P}_x)_{x \in S}\right)$$

nennen wir das kanonische Modell für $(X_0, (M_n)_{n\geq 1})$.

Beweis. Sei $x \in S$ beliebig. Mit dem Konsistenzsatz von Kolmogorov kann bereits mittels der Eigenschaft (3.1.2) ein W-Maß definiert werden, wir nutzen jedoch den Satz von Ionescu-Tulcea, da dieser auch unter allgemeineren Voraussetzungen an S gültig bleibt. Bezeichne dazu für jedes $n \geq 1$

$$\Omega_0 := S, \qquad\qquad P_0 := \delta_x,$$

$$\Omega_n := S \times \prod_{i=1}^{n} M(d \times d, \mathbb{R}), \qquad\qquad P_n : \Omega_{n-1} \to M(d \times d, \mathbb{R}),$$

wobei der Kern P_n definiert sei durch

$$\begin{aligned} &P_n(x, M_1, \ldots, M_{n-1}, D) := \\ &\frac{1}{r((xM_1 \cdots M_{n-1})^{\sim})} \int_D \mu(dM) \|(xM_1 \cdots M_{n-1})^{\sim} M\|^{\varkappa} r((xM_1 \cdots M_{n-1}M)^{\sim}) \end{aligned}$$

für alle $x \in S$, $M_1, \ldots, M_{n-1} \in M(d \times d, \mathbb{R})$ und $D \in \mathcal{M}$. Aus der Eigenschaft (3.1.1) folgt direkt, dass $P_n(x, M_1, \ldots, M_{n-1}, \cdot)$ für jede Auswahl von $x, M_1, \ldots, M_{n-1}$ ein W-Maß auf $M(d \times d, \mathbb{R})$ bildet.

Nach dem Satz von Ionescu-Tulcea existiert dann ein eindeutig bestimmtes W-Maß

$$\mathbb{P}_x = \otimes_{n \geq 0} P_n$$

auf Ω, und es gilt

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_x(A \times D_1 \times \cdots \times D_n \times M(d \times d, \mathbb{R})^{\infty}) \\ =\ & P_0 \otimes \cdots \otimes P_n(A \times D_1 \times \cdots \times D_n) \\ =\ & \int_{A \times D_1 \times \cdots \times D_n} \cdots \int P_n(x, M_1, \ldots, M_{n-1}, dM_n) P_{n-1}(x, M_1, \ldots, M_{n-1}, dM_{n-1}) \ldots P_0(dx) \\ =\ & \int_{A \times D_1 \times \cdots \times D_n} \cdots \int \frac{1}{r((x\Pi_{n-1})^{\sim})} \|(x\Pi_{n-1})^{\sim} M_n\|^{\varkappa} r((x\Pi_{n-1}M_n)^{\sim})\ \mu(dM_n) \times \\ & \frac{1}{r((x\Pi_{n-2})^{\sim})} \|(x\Pi_{n-2})^{\sim} M_{n-1}\|^{\varkappa} r((x\Pi_{n-2}M_{n-1})^{\sim})\ \mu(dM_{n-1}) \ldots P_0(dx) \\ =\ & \int_{A \times D_1 \times \cdots \times D_n} \cdots \int \frac{1}{r((x\Pi_{n-1})^{\sim})} \frac{\|(x\Pi_{n-2})^{\sim} M_{n-1}M_n\|^{\varkappa}}{\|(x\Pi_{n-2})^{\sim} M_{n-1}\|^{\varkappa}} r((x\Pi_n)^{\sim}) \times \\ & \frac{1}{r((x\Pi_{n-2})^{\sim})} \|(x\Pi_{n-2})^{\sim} M_{n-1}\|^{\varkappa} r((x\Pi_{n-1})^{\sim})\ \mu(dM_n)\mu(dM_{n-1}) \ldots P_0(dx) \\ =\ & \int_{A \times D_1 \times \cdots \times D_n} \cdots \int \|(x\Pi_{n-2})^{\sim} M_{n-1}M_n\|^{\varkappa} r((x\Pi_n)^{\sim}) \frac{1}{r((x\Pi_{n-2})^{\sim})}\ \mu(dM_n)\mu(dM_{n-1}) P_0(dx) \\ =\ & \quad \ldots \\ =\ & \int_A \frac{1}{r(x)} \int_{D_1 \times \cdots \times D_n} \cdots \int \|x\Pi_n\|^{\varkappa} r((x\Pi_n)^{\sim})\ \mu(dM_n) \ldots \mu(dM_1) P_0(dx) \end{aligned}$$

$$= \delta_x(A) \cdot \frac{1}{r(x)} \int_{D_1 \times \cdots \times D_n} \cdots \int \mu(dM_1) \ldots \mu(dM_n) \; \|x\Pi_n\|^{\varkappa} r((x\Pi_n)^{\sim}) \qquad \square$$

3.3 Bemerkung

Für alle $n \geq 1$ sind die endlich-dimensionalen Randverteilungen $\mathbb{P}_x^{(M_1, \ldots M_n)}$ offenbar äquivalent zu $\bigotimes_{i=1}^n \mu$, insbesondere ist

$$\operatorname{supp}(\mathbb{P}_x^{(M_1, \ldots M_n)}) = \operatorname{supp}(\mu^n) \text{ für alle } n \geq 1.$$

Im Fall $\varkappa = 0$ und $r \equiv 1$ gilt sogar $\mathbb{P}_x = \delta_x \otimes \mu^{\infty}$.

3.4 Definition

Gegeben ein Modell $\mathfrak{M}$ wie in 3.2, definiere Zufallsvariablen

$$X_n : \Omega \to S, \qquad X_n := \begin{cases} (X_0\Pi_n)^{\sim} & \text{falls } X_0\Pi_n \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

$$U_n : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad U_n := \begin{cases} \log \frac{\|X_0\Pi_n\|}{\|X_0\Pi_{n-1}\|} & \text{falls } \|X_0\Pi_{n-1}\| \neq 0 \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

für $n \geq 1$; sowie $U_0 := 0$ und $V_n := U_0 + \cdots + U_n$ für $n \geq 0$.

Es gilt dann

$$V_n = \sum_{l=1}^{n} (\log \|X_0\Pi_l\| - \log \|X_0\Pi_{l-1}\|) = \log \|X_0\Pi_n\| - \log \|X_0\| = \log \|X_0\Pi_n\|$$

(sofern $U_n \neq -\infty$). Offensichtlich gilt $\mathbb{P}$-*f.s.* (außerhalb der Nullmenge $\{X_{n-1}M_n = 0\}$)

$$X_n = (X_{n-1}M_n)^{\sim},$$
$$U_n = \log \|X_{n-1}M_n\|$$

für alle $n \geq 1$. Die (unter der Prozessvergangenheit) bedingte Verteilung von (X_n, U_n) hängt also, wie schon im Überblick erläutert, nur von X_{n-1} und M_n ab. Dies führt uns zu folgendem entscheidenden Satz:

3.5 Satz

Gegeben ein Modell $\mathfrak{M}$ mit Zufallsvariablen $(X_n, U_n, V_n)_{n\geq 0}$ wie in 3.4. Sei $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ die kanonische Filtration von $(X_n, U_n)_{n\geq 0}$.

Dann bildet $(X_n, U_n)_{n\geq 0}$ unter jedem $\mathbb{P}_x$ eine Markov-Kette (bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$) mit Übergangskern $P : S \times (\mathcal{S} \times \mathcal{B}) \to [0,1]$, gegeben durch

$$P\,(y, A \times B) = \frac{1}{r(y)} \int \mu(dM) \|yM\|^{\varkappa} r((yM)^{\sim}) \mathbb{1}_A((yM)^{\sim}) \mathbb{1}_B(\log \|yM\|) \qquad (3.1.3)$$

für alle $y \in S, A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{B}$. Insbesondere ist $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ ein Standard-Markov-Random-Walk, und

$$\mathfrak{M}' := \big(\Omega, \mathcal{A}, \big(X_n, V_n)_{n\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in S}\big)$$

bildet ein Standardmodell für $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$.

Beweis. Seien $x \in S$, $m \geq 0$, $A_1, \ldots A_{m+1} \in \mathcal{S}$, $B_1, \ldots B_{m+1} \in \mathcal{B}$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x\,(X_1 \in A_1, u_1 \in B_1, \ldots, X_{n+1} \in A_{n+1}, U_{n+1} \in B_{n+1})\\
=&\frac{1}{r(x)} \int \cdots \int \mu(dM_1) \ldots \mu(dM_{n+1}) \|x\Pi_{n+1}\|^{\varkappa} r((X_{n+1})) \mathbb{1}_{A_1}(X_1) \cdots \mathbb{1}_{A_n}(X_n) \times\\
&\mathbb{1}_{B_1}(U_1) \cdots \mathbb{1}_{B_n}(U_n) \cdot \mathbb{1}_{A_{n+1}}(X_{n+1}) \mathbb{1}_{B_{n+1}}(U_{n+1})\\
=&\frac{1}{r(x)} \int \cdots \int \mu(dM_1) \ldots \mu(dM_n) \|x\Pi_n\|^{\varkappa} r((X_n)) \mathbb{1}_{A_1}(X_1) \cdots \mathbb{1}_{A_n}(X_n) \mathbb{1}_{B_1}(U_1) \cdots \mathbb{1}_{B_n}(U_n) \times\\
&\frac{1}{r(X_n)} \int \mu(dM_{n+1}) \|X_n M_{n+1}\|^{\varkappa} r((X_n M_{n+1})^{\sim}) \mathbb{1}_{A_{n+1}}(X_n M_{n+1}) \mathbb{1}_{B_{n+1}}(\log \|X_n M_{n+1}\|)\\
=&\frac{1}{r(x)} \int \cdots \int \mu(dM_1) \ldots \mu(dM_n) \|x\Pi_n\|^{\varkappa} r((X_n)) \mathbb{1}_{A_1}(X_1) \cdots \mathbb{1}_{A_n}(X_n) \mathbb{1}_{B_1}(U_1) \cdots \mathbb{1}_{B_n}(U_n) \times\\
&P\,(X_n, A_{n+1} \times B_{n+1}).
\end{aligned}$$

Dies beweist die Markov-Eigenschaft bzgl. der kanonischen Filtration. Dass $\mathfrak{M}'$ ein Standardmodell bildet, folgt direkt. □

3.6 Bemerkung
Aus dem Beweis von 3.1.2 kann man bereits sehen, dass

$$\mathbb{P}_x\,(M_{n+1} \in \cdot \mid X_0, M_1, \ldots, M_n) = \mathbb{P}_x\,(M_{n+1} \in \cdot \mid X_n) = \mathbb{P}_{X_n}\,(M_1 \in \cdot) \quad \mathbb{P}_x\text{-}f.s.$$

für alle $x \in S$ und $n \geq 0$. Aus dieser Eigenschaft und der $\sigma(X_0, M_1 \ldots, M_n)$-Messbarkeit von (X_n, U_n) kann Satz 3.5 auch gefolgert werden.

Insbesondere ist die Matrizenfolge $(M_n)_{n\geq 1}$ unter $\mathbb{P}_x$ zwar nicht mehr unabhängig identisch verteilt; die Verteilung von M_n hängt jedoch nur von X_{n-1} ab. Damit bleibt die eingangs gegebene ad-hoc Begründung, weshalb $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ einen Markov-Random-

Walk bilde, schlüssig.

Schließlich fehlt uns noch das W-Maß $\mathbf{P}$, unter dem $(M_n)_{n\geq 0}$ eine Folge stochastisch unabhängiger, identisch verteilter Zufallsmatrizen mit Verteilung μ bildet:

3.7 Definition und Satz
Gegeben eine Verteilung μ auf $M(d \times d, \mathbb{R})$; und $(\Omega, \mathcal{A}, (X_0, (M_n)_{n\geq 1}))$ wie in 3.2, setze

$$\mathbf{P} := \frac{1}{\lambda\!\!\lambda_S(S)} \lambda\!\!\lambda_S \otimes \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mu.$$

Dann ist $(\Omega, \mathcal{A}, (M_n)_{n\geq 1}, \mathbf{P})$ ein Standardmodell für Folgen von unabhängig, identisch verteilten Zufallsmatrizen mit Verteilung μ.
Wird ein Modell $\mathfrak{M}$ mit $\mathbf{P}$ erweitert, so gilt für alle $x \in S$, $n \geq 0$ und jede meßbare, beschränkte Funktion f:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_x \left[f(X_0, V_0, X_1, V_1, \ldots, X_n, V_n) \right] \\ =&\mathbf{E} \left[f(x, 0, (xM_1)^\sim, \log \|xM_1\|, \ldots, (x\Pi_n)^\sim, \log \|x\Pi_n\|) e^{\varkappa \log \|x\Pi_n\|} r((x\Pi_n)^\sim) \right]. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Beweis. Durch scharfes Hinsehen im Beweis von 3.5 und Anwenden des Funktionserweiterungsargumentes. □

Die Verteilung μ der Matrizen hatten wir nur eingeführt, um ein gemeinsames Modell für $(\mathbb{P}_x)_{x\in S}$ und $\mathbf{P}$ definieren zu können. Von nun an werden wir uns auf die der u.i.v. Matrizenfolge zugrunde liegende Verteilung wieder mit $\mathbf{P}^{M_1}$ beziehen.

3.2. Voraussetzungen des Markov-Erneuerungstheorems

Wir geben nun Bedingungen an die Folge der Matrizen an, unter denen das Markov-Erneuerungstheorem auf den oben definierten Markov-Random-Walk anwendbar ist. Das Hauptresultat werden wir für Verteilungen formulieren, die auf die Menge der positiven Matrizen konzentriert sind. Dennoch zeigen wir die Anwendbarkeit des Markov-Erneuerungstheorems unter etwas allgemeineren Bedingungen. Diese sind für positive Matrizen leicht nachzuprüfen; und erlauben es uns aber zugleich, ein einfaches Beispiel anzugeben, das die Voraussetzungen des Markov-Erneuerungstheorems 1.13 erfüllt; dessen Steuerkette $(X_n)_{n\geq 0}$ aber nicht Harris-rekurrent ist. So haben wir eine Abgrenzung zwischen der Anwendbarkeit der verschiedenen Versionen des Markov-Erneuerungstheorems auf den Fall der Matrizenfolgen.

Im Folgenden legen wir stets ein Modell $\mathfrak{M}$ (und damit ein invariantes S und ein maßdefinierendes Paar $(r, \varkappa)$) zu Grunde. Damit ist gleichzeitig auch ein Modell $\mathfrak{M}'$ für $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ fest gewählt.

3.2.1. Stetigkeit in den Anfangsbedingungen

Die Stetigkeit in den Anfangsbedingungen ist eng mit der Stetigkeit der Matrixmultiplikation verwoben. Allerdings wird neben der Normungleichung

$$\|xM - yM\| \leq \|x - y\| \, \|M\|$$

noch eine Abschätzung nach unten benötigt, welche im Allgemeinen nicht erfüllt sein muss, sich für Vektoren aus S_+ und Matrizen mit positiven Einträgen aber gut zeigen lässt, wie wir später sehen werden.

3.8 Satz
Es gelte

$$\mathbb{P}_x \left(\exists C > 0 \text{ mit } \|x\Pi_n\| \geq C\|\Pi_n\| \ \forall n \geq 0 \right) = 1 \tag{3.2.1}$$

für alle $x \in S$. Dann ist $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ stetig in den Anfangsbedingungen.

3.9 Bemerkung
Die Konstante C darf hier Pfad-abhängig sein, genau genommen müsste es also heißen

$$\mathbb{P}_x \left(\{\omega \in \Omega \ : \ \exists C(\omega) > 0 \text{ mit } \|x\Pi_n(\omega)\| \geq C(\omega)\|\Pi_n(\omega)\| \ \forall n \geq 0\} \right) = 1.$$

Notation
Für $B \in \mathcal{M}^k$, $k \geq 1$, $y \in S$ schreiben wir kurz $\mathbb{P}_y(B)$ statt $\mathbb{P}_y\left(S \times B \times M(d \times d, \mathbb{R})^\infty\right)$.

Beweis. Seien $\varepsilon > 0, x \in S$ beliebig. Wir werden zeigen, dass es $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ gibt, so dass für alle $y \in S$ mit $\|x - y\| < \delta := \delta_1\delta_2$ die beiden Ungleichungen aus der Definition der Stetigkeit in den Anfangsbedingungen, 1.11 (c), gelten. Dies geschieht im Wesentlichen in zwei Schritten, in denen wir uns nur mit der zweiten Ungleichung beschäftigen; die erste Ungleichung folgt dann im dritten Schritt.

Im *1. Schritt* werden wir zeigen, dass es Mengen $F(x, \delta_1) \subset \mathcal{M}^\infty$ gibt, so dass für alle

Folgen von Matrizen $(m_i)_{i\geq 1} \in F(x, \delta_1)$

$$\|x-y\| < \delta = \delta_1\delta_2 \;\Rightarrow\; \|(x\pi_n)^{\sim} - (y\pi_n)^{\sim}\| < \varepsilon \text{ und } \Big|\log\|x\pi_n\| \;-\log\|y\pi_n\|\Big| < \varepsilon$$

für alle $n \geq 1$ gilt. Dabei bezeichne $\pi_n = \prod_{i=1}^n m_i$.

Ist dies gezeigt, so folgt für beschränktes und messbares $f : \prod_{i=0}^\infty (S\times\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ aus der Definition von f^ε in (1.10), dass

$$f\left(y, 0, (y\pi_1)^{\sim}, \log\|y\pi_1\|, \dots\right) \leq f^\varepsilon\left(x, 0, (x\pi_1)^{\sim}, \log\|x\pi_1\|, \dots\right)$$

für $(m_i)_{i\geq 1} \in F(x,\delta_1)$ und $\|x-y\| < \delta$. Wegen des ersten Arguments beider Funktionen müssen wir $\delta = \delta_1\delta_2 < \varepsilon$ wählen, dies ist aber ohne Weiteres möglich.

Insbesondere erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_y\left[f\left(X_0, V_0, X_1, V_1, \dots\right)\right] \\
=\;& \mathbb{E}_y\left[f\left(y, 0, (y\Pi_1)^{\sim}, \log\|y\Pi_1\|, \dots\right)\right] \qquad (3.2.2)\\
\leq\;& \mathbb{E}_y\left[f^\varepsilon\left(x, 0, (x\Pi_1)^{\sim}, \log\|x\Pi_1\|, \dots\right)\cdot \mathbb{1}_{F(x,\delta_1)}((M_n)_{n\geq1})\right] + \|f\|_\infty \cdot \mathbb{P}_y\left(F(x,\delta_1)^c\right).
\end{aligned}$$

Im *2. Schritt* schaffen wir dann den Übergang von $\mathbb{E}_y$ zu $\mathbb{E}_x$. Dazu zeigen wir, dass δ_2 so gewählt werden kann, dass

$$C_1(\delta_2)\mathbb{P}_x(\cdot) \geq \mathbb{P}_y(\cdot) \geq C_2(\delta_2)\mathbb{P}_x(\cdot)$$

für von δ_2 abhängige Konstanten C_1, C_2. Diese sind so beschaffen, dass wir

$$(1+\frac{\varepsilon}{3})\mathbb{P}_x(A) \geq \mathbb{P}_y(A) \geq (1-\frac{\varepsilon}{3})\mathbb{P}_x(A) \qquad (3.2.3)$$

für alle $A \in \mathcal{M}^\infty \cap F(x,\delta_1)$ erhalten können. Mit diesem Wissen folgt dann die zweite Ungleichung ($F := F(x,\delta_1)$):

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_y\left[f^\varepsilon\left(x, 0, (x\Pi_1)^{\sim}, \log\|x\Pi_1\|, \dots\right)\cdot \mathbb{1}_{F(x,\delta_1)}((M_n)_{n\geq1})\right] + \|f\|_\infty \cdot \mathbb{P}_y\left(F(x,\delta_1)^c\right)\\
=\;& \int_F f^{\varepsilon+} d\mathbb{P}_y - \int_F f^{\varepsilon-} d\mathbb{P}_y + \|f\|_\infty \cdot \mathbb{P}_y(F^c)\\
\leq\;& \int_F f^{\varepsilon+} d\mathbb{P}_x + \frac{\varepsilon}{3}\int_F f^{\varepsilon+} d\mathbb{P}_x - \int_F f^{\varepsilon-} d\mathbb{P}_x + \frac{\varepsilon}{3}\int_F f^{\varepsilon-} d\mathbb{P}_x + (1+\frac{\varepsilon}{3})\|f\|_\infty \mathbb{P}_x(F^c)\\
=\;& \mathbb{E}_x\left[f^\varepsilon\left(x, 0, (x\Pi_1)^{\sim}, \log\|x\Pi_1\|, \dots\right)\cdot \mathbb{1}_F((M_n)_{n\geq1})\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\varepsilon}{3}\mathbb{E}_x\left[|f^\varepsilon\left(x,0,(x\Pi_1)^\sim,\log\|x\Pi_1\|,\dots\right)|\cdot\mathbb{1}_F((M_n)_{n\geq 1})\right]+(1+\frac{\varepsilon}{3})\|f\|_\infty\mathbb{P}_x\left(F^c\right)\\
\leq{}& \mathbb{E}_x\left[f^\varepsilon\left((X_n,V_n)_{n\geq 0}\right)\cdot\mathbb{1}_F((M_n)_{n\geq 1})\right]+\frac{\varepsilon}{3}\|f\|_\infty\mathbb{P}_x\left(F\right)+(1+\frac{\varepsilon}{3})\|f\|_\infty\mathbb{P}_x\left(F^c\right)\\
\leq{}& \mathbb{E}_x\left[f^\varepsilon\left((X_n,V_n)_{n\geq 0}\right)\right]+\|f\|_\infty\cdot\mathbb{P}_x\left(F^c\right)+\frac{\varepsilon}{3}\|f\|_\infty\mathbb{P}_x\left(F\right)+(1+\frac{\varepsilon}{3})\|f\|_\infty\mathbb{P}_x\left(F^c\right)\\
={}& \mathbb{E}_x\left[f^\varepsilon(X_n,V_n)_{n\geq 0}\right]+\frac{\varepsilon}{3}\|f\|_\infty+2\|f\|_\infty\cdot\mathbb{P}_x\left(F^c\right),
\end{aligned}
$$

wobei in der dritten Zeile das Funktionserweiterungsargument angewendet wurde und in der fünften Zeile die Definition der X_i und V_i.

Wenn wir nun δ_1 so wählen dürfen, dass

$$\mathbb{P}_x\left(F(x,\delta_1)^c\right)<\frac{\varepsilon}{3}, \tag{3.2.4}$$

so haben wir

$$\mathbb{E}_y\left[f((X_n,V_n)_{n\geq 0})\right]\leq\mathbb{E}_x\left[f^\varepsilon((X_n,V_n)_{n\geq 0})\right]+\varepsilon\|f\|_\infty$$

gezeigt. Die erste Ungleichung ergibt sich dann ganz analog.

Der aufmerksame Leser wird notiert haben, dass (neben der nicht hinderlichen Einschränkung $\delta<\varepsilon$) δ_1 und δ_2 jeweils nur einer Bedingung genügen müssen ((3.2.4) bzw. (3.2.3)). Wir können also unbesorgt in den Beweis starten.

1.SCHRITT :
Nach Ungleichung A.1 (1) gilt

$$\left\|(x\pi_k)^\sim-(y\pi_k)^\sim\right\|\leq\frac{2}{\|x\pi_k\|}\|x\pi_k-y\pi_k\|\leq\frac{2\,\|\pi_k\|}{\|x\pi_k\|}\,\|x-y\|\,.$$

Definiere für $\delta_1>0$ und $k\geq 1$ die Mengen

$$
\begin{aligned}
F(x,\delta_1,k)&:=\left\{(m_1,\dots,m_k)\in M(d\times d,\mathbb{R})^k\ :\ \|x\pi_l\|\geq\delta_1\cdot\|\pi_l\|\ \forall\, l\leq k\right\},\\
F(x,\delta_1)&:=\left\{(m_i)_{i\geq 1}\in M(d\times d,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}\ :\ \|x\pi_l\|\geq\delta_1\cdot\|\pi_l\|\ \forall\, l\geq 1\right\}.
\end{aligned}
$$

Nach Voraussetzung (3.2.1) ist

$$\lim_{\delta_1\to 0}\mathbb{P}_x\left(F(x,\delta_1)^c\right)=0.$$

Wir können also δ_1 so klein wählen, dass $\mathbb{P}_x\left(F(x,\delta_1)^c\right)<\frac{\varepsilon}{3}$. Wähle nun $\delta_2>0$ zunächst so, dass $\delta_2<\frac{\varepsilon}{2}$.

Für $(m_i)_{i\geq 1} \in F(x,\delta_1)$ und $y \in S$ mit $\|x-y\| < \delta_1\delta_2$ haben wir dann

$$\|(x\pi_k)^\sim - (y\pi_k)^\sim\| \leq \frac{2\|\pi_k\|}{\delta_1\|\pi_k\|}\delta_1\delta_2 < \varepsilon$$

für alle $k \geq 1$, sowie weiter

$$\begin{aligned}
(1-\delta_2)\|x\pi_k\| &< \|x\pi_k\| - \frac{\|y-x\|}{\delta_1}\|x\pi_k\| \leq \|x\pi_k\| - \|y-x\|\|\pi_k\| \\
&\leq \|x\pi_k\| - \|(y-x)\pi_k\| \\
&\leq \|y\pi_k\| \\
&\leq \|x\pi_k\| + \|(y-x)\pi_k\| \leq \|x\pi_k\| + \|y-x\|\|\pi_k\| \\
&\leq \|x\pi_k\| + \|y-x\|\frac{\|x\pi_k\|}{\delta_1} \\
&< (1+\delta_2)\|x\pi_k\|
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (1-\delta_2) < \frac{\|y\pi_k\|}{\|x\pi_k\|} < (1+\delta_2) \quad \text{bzw.} \quad \left|\frac{\|y\pi_k\|}{\|x\pi_k\|} - 1\right| < \delta_2. \tag{3.2.5}$$

Nach eventueller Verkleinerung von δ_2 ist der Logarithmus als stetig differenzierbare Funktion auf dem kompakten Intervall $[1-\delta_2, 1+\delta_2]$ 2-Lipschitz-stetig, und es folgt

$$\left|\log\|y\pi_k\| - \log\|x\pi_k\|\right| < 2\delta_2 < \varepsilon.$$

2.Schritt : $(1+\frac{\varepsilon}{3})\mathbb{P}_x(A) \geq \mathbb{P}_y(A) \geq (1-\frac{\varepsilon}{3})\mathbb{P}_x(A) \quad \forall A \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}} \cap F(x,\delta_1)$

Es genügt, die Abschätzung auf den Zylindermengen $(A \cap F(x,\delta_1,k))$ für beliebiges $k \geq 1$ und $A \in \mathcal{M}^k$ zu zeigen, da $\mathcal{M}^\infty$ von solchen A erzeugt wird; und

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}_x(A \cap F(x,\delta_1,k)) = \mathbb{P}_x(A \cap F(x,\delta_1))$$

gilt. Sei also $k \geq 1$, $A \in \mathcal{M}^k$ beliebig. Für $y \in S$ mit $\|x-y\| < \delta_1\delta_2$ gilt dann mit der Abschätzung (3.2.5)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_y(A \cap F(x,\delta_1,k)) \\
&= \frac{1}{r(y)}\mathbf{E}\left[\|y\Pi_k\|^\varkappa r((y\Pi_k)^\sim)\mathbb{1}_{A\cap F(x,\delta_1,k)}\right] \\
&= \frac{r(x)}{r(y)}\frac{1}{r(x)}\mathbf{E}\left[\left(\frac{\|y\Pi_k\|}{\|x\Pi_k\|}\right)^\varkappa \|x\Pi_k\|^\varkappa \frac{r((y\Pi_k)^\sim)}{r((x\Pi_k)^\sim)} r((x\Pi_k)^\sim)\mathbb{1}_{A\cap F(x,\delta_1,k)}\right] \\
&\leq \left(\max_{z_1,z_2\in S}\frac{r(z_1)}{r(z_2)}\right)\frac{1}{r(x)}\mathbf{E}\left[(1+\delta_2)^\varkappa\|x\Pi_k\|^\varkappa\left(\max_{z_1,z_2\in S}\frac{r(z_1)}{r(z_2)}\right) r((x\Pi_k)^\sim)\mathbb{1}_{A\cap F(x,\delta_1,k)}\right]
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\max_{z_1,z_2\in S} \frac{r(z_1)}{r(z_2)} \right)^2 (1+\delta_2)^{\varkappa} \mathbb{P}_x \left(A \cap F(x,\delta_1,k) \right).$$

Analog erhalten wir

$$\mathbb{P}_y \left(A \cap F(x,\delta_1,k) \right) \geq \left(\min_{z_1,z_2\in S} \frac{r(z_1)}{r(z_2)} \right)^2 (1-\delta_2)^{\varkappa} \mathbb{P}_x \left(A \cap F(x,\delta_1,k) \right).$$

Da $r > 0$ und stetig ist, nimmt $\frac{r(z_1)}{r(z_2)}$ auf der kompakten Menge $S \times S$ tatsächlich Minimum und Maximum an, und wir können δ_2 (unabhängig von k und A!) so weit verkleinern, dass

$$(1+\frac{\varepsilon}{3})\mathbb{P}_x \left(A \cap F(x,\delta_1,k) \right) \geq \mathbb{P}_y \left(A \cap F(x,\delta_1,k) \right) \geq (1-\frac{\varepsilon}{3})\mathbb{P}_x \left(A \cap F(x,\delta_1,k) \right).$$

Der Grenzübergang $k \to \infty$ liefert dann die Behauptung.

Wie eingangs beschrieben, kann für alle $y \in S$ mit $\|x-y\| < \delta_1\delta_2$ und jede beschränkte, messbare Funktion f

$$\mathbb{E}_y \left[f((X_n, V_n)_{n\geq 0}) \right] \leq \mathbb{E}_x \left[f^{\varepsilon}((X_n, V_n)_{n\geq 0}) \right] + \varepsilon \|f\|_{\infty}$$

gefolgert werden. Dies ist die zweite Ungleichung aus Definition 1.11 (c).

3.Schritt : Die erste Ungleichung

Der Nachweis der ersten Ungleichung aus 1.11 (c) kann ganz analog geführt werden. Der erste Schritt lässt sich bis auf den Austausch $x \leftrightarrow y$ wörtlich übernehmen. (3.2.2) wird zu

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_x \left[f\left(x, 0, (x\pi_1)^{\sim}, \log\|x\pi_1\|, \dots\right) \right] \\ \leq\ & \mathbb{E}_x \left[f^{\varepsilon}\left(y, 0, (y\pi_1)^{\sim}, \log\|y\pi_1\|, \dots\right) \cdot \mathbb{1}_{F(x,\delta_1)} \right] + \|f\|_{\infty} \cdot \mathbb{P}_x \left(F(x,\delta_1)^c \right). \end{aligned}$$

Der zweite Summand kann hier direkt durch $\frac{\varepsilon}{3}\|f\|_{\infty}$ abgeschätzt werden; insbesondere muss δ_1 nicht angepasst werden. Im zweiten Schritt taucht allerdings die zusätzliche Bedingung

$$\begin{aligned} (1-\frac{\varepsilon}{3}) &< \left(\min_{z_1,z_2\in S} \frac{r(z_1)}{r(z_2)} \right)^2 \left(\frac{1}{1+\delta_2} \right)^{\varkappa}, \\ (1+\frac{\varepsilon}{3}) &> \left(\max_{z_1,z_2\in S} \frac{r(z_1)}{r(z_2)} \right)^2 \left(\frac{1}{1-\delta_2} \right)^{\varkappa} \end{aligned}$$

auf; δ_2 muss eventuell verkleinert werden. Setze nun $\delta := \delta_1\delta_2 > 0$. Dann gilt für alle $y \in B_\delta(x)$ und jede messbare, beschränkte Funktion $f : \prod_{i=0}^{\infty}(S \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}_x\left[f((X_n, V_n)_{n\geq 0})\right] \leq \mathbb{E}_y\left[f^\varepsilon((X_n, V_n)_{n\geq 0})\right] + \varepsilon\|f\|_\infty,$$

$$\mathbb{E}_y\left[f((X_n, V_n)_{n\geq 0})\right] \leq \mathbb{E}_x\left[f^\varepsilon((X_n, V_n)_{n\geq 0})\right] + \varepsilon\|f\|_\infty.$$

□

3.2.2. Existenz eines topologisch rekurrenten Punktes

Wie bereits im Überblick erläutert, führen wir die Existenz eines topologisch rekurrenten Punktes für $(X_n)_{n\geq 0}$ auf die Realisierbarkeit kontrahierender Matrizen zurück. Eine realisierbare kontrahierende Matrix wollen wir *zulässig* nennen:

3.10 Definition
Eine Matrix $m \in M(d \times d, \mathbb{R})$ nennen wir zulässig, falls es ein $k \geq 1$ und Matrizen $m_1, \ldots, m_k \in \operatorname{supp}(\mathbf{P}^{M_1})$ gibt, so dass $m = m_1 \cdots m_k$; und m einen algebraisch einfachen, betraglich größten Eigenwert $\lambda_1(m) > 0$ besitzt.

3.11 Lemma
Es gebe eine zulässige Matrix m, und für einen rechten Eigenvektor a^t zu $\lambda_1(m)$ gelte $\min_{x\in S}\langle x, a\rangle > 0$. Dann existiert ein topologisch rekurrentes $x^* \in S$.

Es sei daran erinnert, dass xa^t dem (euklidischen) Skalarprodukt $\langle x, a\rangle$ entspricht, und $a^t x$ eine $d \times d$-Matrix bildet. Wir werden zunächst kurz Konvergenzergebnisse aus der Perron-Frobenius-Theorie auf diesen allgemeineren Fall übertragen. Aus der Stetigkeit der Matrizenmultiplikation folgt, dass auch Matrizen aus kleinen Umgebungen um die m_i auf x kontrahierend wirken, und wir somit tatsächlich jeden beliebigen Startvektor mit positiver Wahrscheinlichkeit in jede ε-Umgebung des „Frobenius-Eigenvektors“ von m ziehen können. Mit der Markoveigenschaft folgt dann, dass dies auch unendlich oft geschieht.

Beweis. Sei $\mathbf{m}$ eine Matrix mit algebraisch einfachem, betraglich größtem Eigenwert $\lambda_1 > 0$ und zugehörigem rechten Eigenvektor $\hat{a}^t$, so dass $\min_{x\in S}\langle x, \hat{a}\rangle = c > 0$. Aus der Gestalt der Basiswechselmatrizen zur Jordan-Normalform kann man sehen, dass es einen linken Eigenvektor b gibt mit $\langle b, \hat{a}\rangle = \lambda_1$: Ist $A\mathbf{m}A^{-1}$ in Jordan-Normalform, und ist λ_1 der erste Eintrag der Jordan-Matrix, so steht in der ersten Spalte von A^{-1} ein rechter Eigenvektor zu λ_1, und in der ersten Zeile von A ein linker Eigenvektor zu λ_1.

Dann kann $\hat{a}^t$ mit einer eindeutigen positiven Zahl zu a^t skaliert werden, so dass $\langle \tilde{b}, a\rangle = 1$. Bezeichnet nun

$$\varrho := \max\{|\lambda| \ : \ \lambda \text{ ist Eigenwert von } \mathbf{m} \text{ und } \lambda \neq \lambda_1\}$$

den Betrag des zweitgrößten Eigenwertes; so lässt sich wie in der Perron-Frobenius-Theorie (siehe [3], 15.8) zeigen, dass für ein $C \in (0, \infty)$

$$\left\| \left(\frac{\mathbf{m}}{\lambda_1}\right)^n - a^t\tilde{b} \right\| \leq C \cdot \left(\frac{\varrho}{\lambda_1}\right)^n$$

für alle $n \geq 1$. Daraus folgt direkt

$$\left\| \frac{x\mathbf{m}^n}{\lambda_1^n} - x(a^t\tilde{b}) \right\| \leq \|x\| \cdot \left\| \left(\frac{\mathbf{m}}{\lambda_1}\right)^n - a^t\tilde{b} \right\| \leq C \cdot \left(\frac{\varrho}{\lambda_1}\right)^n \tag{3.2.6}$$

für alle $n \geq 1$ und alle $x \in S$. Insbesondere lässt sich wegen $xa^t = \langle x, a\rangle \geq c > 0$ mittels der Ungleichung (1) folgern, dass

$$\|(x\mathbf{m}^n)^\sim - \tilde{b}\| \leq \frac{2}{|\langle x, a\rangle|} \left\| \frac{x\mathbf{m}^n}{\lambda_1^n} - (xa^t)\tilde{b} \right\| \leq \frac{2C}{c} \left(\frac{\varrho}{\lambda_1}\right)^n = C_1 \left(\frac{\varrho}{\lambda_1}\right)^n$$

für alle $n \geq 1$ und eine von x unabhängige Konstante $C_1 > 0$. Es liegt also gleichmäßige Konvergenz (in x) vor.

Nach Voraussetzung gibt es $m_1, \ldots, m_k \in \operatorname{supp}(\mathbf{P}^{M_1})$, so dass $\mathbf{m}_0 := m_1 \cdots m_k$ die oben genannten Voraussetzungen (algebraisch einfacher betraglich größter Eigenwert $\lambda_1 > 0$ mit zugehörigen normierten linken Eigenvektor b_0 und rechten Eigenvektor a_0^t, so dass $a_0^t b_0 = 1$ und $\min_{x\in S} \langle x, a\rangle = c_0 > 0$) erfüllt. Fixiere solch ein $\mathbf{m}_0$. Wir wollen nun zeigen, dass

$$\mathbb{P}_x \left(X_n \in B_\varepsilon(b_0) \text{ unendlich oft}\right) = 1 \tag{3.2.7}$$

für alle $x \in S$ und alle $\varepsilon > 0$. Da wegen $\mathbf{P}\left(xM = 0 \text{ oder } (xM_1)^\sim \notin S\right) = 0$ bereits

$$\mathbb{P}_x \left(X_n \notin S\right) = 0$$

für alle $x \in S$ und alle $n \geq 0$ gilt, folgt aus (3.2.7) und der Abgeschlossenheit von S insbesondere, dass $b_0 \in S$. Dann ist $x^* := b_0$ der gesuchte topologisch rekurrente Punkt.

Nachweis von (3.2.7):

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach oben Gezeigtem existiert ein $N_0 \in N$, so dass

$$\|(x\mathbf{m}_0^n)^\sim - b_0\| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.2.8}$$

für alle $n \geq N_0$ und alle $x \in S$. Aus (3.2.6) folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\lim_{n\to\infty} \min_{x\in S} \frac{\|x\mathbf{m}_0^n\|}{\lambda_1^n} = \min_{x\in S} \langle x, a\rangle = c_0 > 0.$$

Also gibt es ein $N \geq N_0$, $c > 0$ mit

$$\|x\mathbf{m}_0^N\| \geq \lambda_1^N c$$

für alle $x \in S$. Fixiere nun dieses N. Nach Ungleichung (1) gilt für alle Matrizen $\mathbf{m}'$ mit $\|\mathbf{m}_0^N - \mathbf{m}'\| < \frac{\varepsilon c \lambda_1^N}{4}$, dass

$$\left\|(x\mathbf{m}^N)^\sim - (x\mathbf{m}')^\sim\right\| \leq \frac{2}{\left\|x\mathbf{m}_0^N\right\|} \left\|x\mathbf{m}_0^N - x\mathbf{m}'\right\| \leq \frac{2}{\left\|x\mathbf{m}_0^N\right\|} \|\mathbf{m}_0^N - \mathbf{m}'\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.2.9}$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} h \ : \ M(d \times d, \mathbb{R})^{N\cdot k} &\to M(d \times d, \mathbb{R}) \\ (m_{1,1}, \ldots, m_{1,k}, m_{2,k} \ldots, m_{N,k}) &\mapsto m_{1,1} \cdots m_{1,k} \cdot m_{2,k} \cdots m_{N,k} \end{aligned}$$

ist stetig; insbesondere bzgl. der Maximumsnorm auf $M(d \times d, \mathbb{R})^{N\cdot k}$. Also gibt es ein $\eta > 0$, so dass für

$$\mathbf{m}' = m_{1,1} \cdots m_{1,k} \cdot m_{2,k} \cdots m_{N,k}$$

mit $m_{j,i} \in B_\eta(m_i)$ für alle $1 \leq j \leq N, 1 \leq i \leq k$, gilt

$$\|\mathbf{m}_0^N - \mathbf{m}'\| < \frac{\varepsilon c \lambda_1^N}{4}.$$

Für solche $\mathbf{m}'$ folgt aus (3.2.8) und (3.2.9), dass

$$\|(xm')^\sim - b_0\| < \varepsilon$$

für alle $x \in S$. Nach Voraussetzung ist $m_i \in \text{supp}(\mathbf{P}^{M_1})$, also insbesondere

$$\mathbf{P}^{M_i}(B_\eta(m_i)) > 0$$

für alle $1 \le i \le k$, und damit gibt es nach (3.1.4) ein (von x unabhängiges) $\delta > 0$ mit

$$\mathbb{P}_x\big(X_{Nk} \in B_\varepsilon(b_0)\big) \ge \mathbb{P}_x\big(M_{lk+i} \in B_\eta(m_i), 1 \le i \le n, 0 \le l < k\big) \ge \delta > 0$$

für alle $x \in S$.

Für die Stoppzeit

$$T := \inf\{n \ge 1 \;:\; X_{nNk} \in B_\varepsilon(b_0)\}$$

gilt dann mittels der Markoveigenschaft und Induktion, dass

$$\mathbb{P}_x\left(T > l\right) < (1-\delta)^l$$

für alle $l \ge 1$ und alle $x \in S$. Somit ist T $\mathbb{P}_x$-*f.s.* endlich unter jedem $x \in S$. Damit gilt aber schon mit dem Standardargument für Kopiensummenfolgen, dass

$$\mathbb{P}_x\left(X_{nNk} \in B_\varepsilon(b_0) \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\ \right) = 1$$

für alle $x \in S$. Damit ist (3.2.7) gezeigt und die Behauptung bewiesen. □

3.12 Korollar

Aus dem Beweis folgt direkt:

(a) Sei m eine zulässige Matrix mit betraglich größtem Eigenwert λ_1, und es gelte

$$\min_{x\in S}\langle x, a\rangle > 0$$

für einen geeigneten rechten Eigenvektor a^t zu λ_1. Wählt man den normierten linken Eigenvektor b zu λ_1 so, dass $\langle b, a\rangle > 0$, dann gilt $b \in S$, und b ist topologisch rekurrent für $(X_n)_{n\ge 0}$.

(b) Mit obigen Bezeichnungen gilt außerdem

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in S}\left|\frac{\|xm^n\|}{\lambda_1^n} - \langle x, a\rangle\right| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in S}\|(xm^n)^\sim - b\| = 0,$$

und es existiert ein c>0 und ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|xm^n\| \ge c\lambda_1^n$$

für alle $x \in S$ und alle $n \geq N$.

(c) *Gilt in der Situation aus (a) nur $\min_{x\in S} |\langle x, a\rangle| > 0$ für eine Teilmenge $S \subset S^{d-1}$, so gilt noch*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in S} \|(xm^n)^\sim - \operatorname{sign}(\langle x, a\rangle)b\| = 0.$$

Dabei bezeichnet sign *die Vorzeichenfunktion.*

3.2.3. Existenz einer stationären Verteilung

Bereits in sehr allgemeinen Fällen besitzen Markov-Ketten auf kompakten Zustandsräumen stationäre Verteilungen (die allerdings nicht eindeutig sein müssen): Es bedarf dazu nur der schwachen Feller-Eigenschaft (siehe Satz A.7). Diese liegt in unserem Modell (und auch im später verwendeten Modell für reguläre Matrizen) vor:

3.13 Satz
Es gelte

$$\mathbf{E}\left[\|M_1\|^\varkappa\right] < \infty. \tag{3.2.10}$$

Dann bildet für jedes $x \in S$ jeder schwache Häufungspunkt von

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P'^{(i)}(x, \cdot)$$

eine stationäre Verteilung für $(X_n)_{n\geq 0}$.

Dabei bezeichnet, wie in 1.2 festgelegt, P' den zu P gehörenden Übergangskern der Steuerkette $(X_n)_{n\geq 0}$.

Beweis. Seien $f \in \mathcal{C}_b(S), x \in S$ beliebig. Da für $\mathbf{P}^{M_1}$-fast alle M die Abbildung $x \mapsto (xM)^\sim$ (auf S) stetig ist, gilt für jede Folge $(x_n)_{n\geq 0} \subset S$ mit $x_n \to x$ die $\mathbf{P}^{M_1}$-f.s. Konvergenz

$$\begin{aligned} g_n(M) &:= \frac{1}{r(x_n)}\|x_n M\|^\varkappa r((x_n M)^\sim) f((x_n M)^\sim) \\ \longrightarrow\quad g(M) &:= \frac{1}{r(x)}\|xM\|^\varkappa r((xM)^\sim) f((xM)^\sim). \end{aligned}$$

Da r strikt positiv ist, und

$$g_n(M) \leq \left(\max_{z_1,z_2\in S} \frac{r(z_1)}{r(z_2)}\right) \|M\|^\varkappa \|f\|_\infty,$$

folgt aus der Voraussetzung, dass $\sup_{n\geq 0}\ g_n$ integrierbar ist. Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} P^{'} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[g_n(M_1)\right] = \mathbf{E}\left[g(M_1)\right] = P^{'} f(x);$$

und da $x, (x_n)_{n\geq 0}$ beliebig waren, die Stetigkeit und damit auch die Beschränktheit von $P^{'} f$. Also besitzt $P^{'}$ die schwache Feller-Eigenschaft. Nach Satz A.7 ist dann für jedes $x \in S$ jeder schwache Häufungspunkt von

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P^{'(i)}(x,\cdot)$$

eine stationäre Verteilung für $(X_n)_{n\geq 0}$. □

Die zusätzlich als Voraussetzung des Markov-Erneuerungstheoremes geforderte Eigenschaft, dass π-positive offene Mengen rekurrent sind, folgt nun aus den übrigen Voraussetzungen:

3.14 Satz
$(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ sei stetig in den Anfangsbedingungen, es existiere ein topologisch rekurrentes $x^* \in S$, und

$$\mathbf{E}\left[\|M_1\|^{\varkappa}\right] < \infty. \tag{3.2.11}$$

Dann gibt es eine stationäre Verteilung π für $(X_n)_{n\geq 0}$, so dass für alle offenen A

$$\pi(A) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x\left(X_n \in A \text{ unendlich oft}\right) = 1 \tag{3.2.12}$$

für alle $x \in S$ gilt.

Beweis. Wähle π als schwachen Häufungspunkt von

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P^{'(i)}(x^*,\cdot).$$

Nach dem vorherigen Satz ist π damit eine stationäre Verteilung für $(X_n)_{n\geq 0}$. Für $A \subset S$ offen mit $\pi(A) > 0$ folgt mit dem Portmanteautheorem A.3

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k} P^{i}(x^*, A) \geq \pi(A).$$

Es gibt also ein $l \geq 1$ mit $P^{l}(x^*, A) > 0$.

Da A offen ist, kann $\mathbb{1}_A$ von unten durch stetige Funktionen $g_n^* : S \to [0,1]$ angenähert werden, so dass

$$\lim_{n\to\infty} g_n^*(x) = \mathbb{1}_A(x) \quad \text{und} \quad \sup_{y\in B_{\frac{1}{n}}(x)} g_n^*(y) \leq \mathbb{1}_A(x)$$

für alle $n \geq 1$. Dann gilt

$$0 < \mathbb{P}_{x^*}\left(X_l \in A\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{x^*}\left[g_n^*(X_l)\right];$$

insbesondere gibt es ein $N \geq 1$ mit

$$\mathbb{E}_{x^*}\left[g_N^*(X_l)\right] - \frac{1}{N} > 0.$$

Setzt man g_n^* nun zu Funktionen $g : \prod_{i=0}^{\infty}(S \times \mathbb{R}) \to [0,1]$ mittels

$$g_n(\dots, x_l, \dots) := g_n^*(x_l)$$

fort, so folgt aus der Stetigkeit in den Anfangsbedingungen von $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$, dass zu $\varepsilon = \frac{1}{N}$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\mathbb{P}_y\left(X_l \in A\right) \geq \mathbb{E}_y\left[g_N^{\frac{1}{N}}(X_l)\right] \geq \mathbb{E}_x\left[g_N(X_l)\right] - \frac{1}{N} =: c > 0$$

für alle $y \in B_\delta(x^*)$.
Mit der starken Markoveigenschaft und einem *geometric trials-Argument* folgt dann, dass

$$T := \inf\{n \geq 1 \;:\; X_n \in A\}$$

unter jedem $\mathbb{P}_x$ fast sicher endlich ist, und damit bereits

$$\mathbb{P}_x\left(X_n \in A \text{ unendlich oft }\right) = 1$$

für alle $x \in S$ gilt. □

3.15 Bemerkung
Auch wenn diese Rekurrenz-Eigenschaft der π-positiven offenen Mengen an die Definition von π-Irreduzibilät erinnert, so ist sie doch nicht dieser äquivalent, wie unser bereits einmal verwendetes Beispiel zeigt:

Sei (M_n) eine Folge von Kopien einer festen, positiven Matrix M. Dann ist $(X_n)_{n\geq 0}$

unter jedem $\mathbb{P}_x$ (untransfomierte Maße, also $r \equiv 1$ und $\varkappa = 0$) eine deterministische Folge, die unter $\mathbb{P}_{b_0}$ sogar konstant gleich b_0 ist, wenn b_0 den Frobenius-Eigenwert von M bezeichnet. Dieses Beispiel erfüllt alle Voraussetzungen der bisherigen Sätze, es lässt sich also ein Maß π finden mit obiger Eigenschaft.

Angenommen, $(X_n)_{n\geq 0}$ sei π-irreduzibel. Nimmt man aus einer offenen Menge A die Menge $N = \{x, xM, xM^2, \dots\}$ heraus, so gilt

$$\mathbb{P}_x\left(X_n \in A\backslash N \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\right) = 0,$$

also muss aufgrund der Irreduzibilität $\pi(A\backslash N) = 0$ gelten. Nun ist aber $b_0 \in A\backslash N$, also $\pi(\{b_0\}^c) = 1$. Andererseits ist aber

$$\mathbb{P}_{b_0}\left(X_n \in \{b_0\}^c \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\ \right) = 0,$$

was einen Widerspruch zur Irreduzibilität liefert. Beachte dabei, dass die Menge $A\backslash N$ nicht offen ist, da sie keine Umgebung von b_0 enthält.

Erst im Fall regulärer Matrizen, wo wir fordern werden, dass $\mathbf{P}^{\Pi_n}$ für ein $n \geq 1$ eine $\boldsymbol{\lambda}$-stetige Komponente besitzt, ist die so erhaltene Verteilung aufgrund der Harris-Rekurrenz auch stets ein Irreduzibilitätsmaß.

3.2.4. π-schwach nichtarithmetisch

3.16 Lemma

Die von

$$G := \{\log \lambda_1(\boldsymbol{m})\ :\ \boldsymbol{m} \text{ zulässig; } \min_{x\in S} \langle x, a\rangle > 0 \text{ für einen rechten Eigenvektor } a^t \text{ zu } \lambda_1(\mathbf{m})\}$$

erzeugte Gruppe sei dicht in $\mathbb{R}$. Dann ist $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ π-schwach nichtarithmetisch für jede stationäre Verteilung π von $(X_n)_{n\geq 0}$.

Beweis. Erinnern wir uns an die Definition von schwach nichtarithmetisch. Zunächst müssen wir eine Menge $\{\zeta_i\ \ i \in I\}$ angeben, so dass die von ihr erzeugte Gruppe dicht in $\mathbb{R}$ ist. Nach Voraussetzung gibt es eine solche Menge, und oBdA sei G höchstens abzählbar (mit Indexmenge I). Es genügt also, ζ_i als i-tes Element von G zu wählen, und die Bedingungen nachzuprüfen.
Sei nun $i \in I$ beliebig und im Folgenden die zu $\zeta_i = \log \lambda_1(\mathbf{m})$ gehörende Matrix $\mathbf{m}$ fixiert. Sei $\delta > 0$ beliebig.

Wir müssen zeigen, dass ein $y \in S$ existiert, so dass gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existieren ein

$A \in \mathcal{S}$ mit $\pi(A) > 0$; $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in A$

$$\mathbb{P}_x \left(\|X_{l_1} - y\| < \varepsilon, \ |V_{l_1} - z| \leq \delta \right) > 0,$$

$$\mathbb{P}_x \left(\|X_{l_2} - y\| < \varepsilon, \ |V_{l_2} - z - \log \lambda_1| \leq \delta \right) > 0.$$

Dazu wählen wir $y := b(\mathbf{m})^\sim \in S$ als linken Eigenvektor von $\mathbf{m}$ (zum Eigenwert λ_1), und a^t als rechten Eigenvektor, so dass $\langle y, a \rangle = 1$; dies ist nach Korollar 3.12 möglich.
Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
Da der natürliche Logarithmus an der Stelle 1 stetig ist, gibt es $\delta' > 0$ mit

$$|x - 1| < \delta' \ \Rightarrow \ |\log(x)| < \delta.$$

Wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts gibt es eine Umgebung A von y, so dass

$$\big| |\langle x, a \rangle| - 1 \big| < \frac{\delta'}{3}$$

für alle $x \in A$. Nach Korollar 3.12 gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \left\| \frac{x\mathbf{m}^n}{\lambda_1^n} \right\| - |\langle x, a \rangle| \right| < \frac{\delta'}{3}, \tag{3.2.13}$$

$$\|(x\mathbf{m}^n)^\sim - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $x \in S$ und $n \geq N$, sowie ein $c > 0$ mit

$$\|x\mathbf{m}^n\| \geq c\lambda_1^n$$

für alle $n \geq N$. Damit gilt nach Ungleichung (1) für jede weitere Matrix m' (mit $x\mathbf{m}' \neq 0$), dass

$$\big\|(x\mathbf{m}^n)^\sim - (x\mathbf{m}')^\sim\big\| \leq \frac{2}{\|x\mathbf{m}^n\|} \|x\mathbf{m}^n - x\mathbf{m}'\| \leq \frac{2}{c\lambda_1^n} \|\mathbf{m}^n - \mathbf{m}'\|$$

für alle $n \geq N$. Nach Wahl ist $\mathbf{m} = m_1 \ldots m_k$ für Matrizen $m_i \in \operatorname{supp}(\mathbf{P}^{M_1})$ für $1 \leq i \leq k$.
Wir nutzen die Stetigkeit der Abbildung

$$\begin{aligned} h \ : \ M(d \times d, \mathbb{R})^{(N+1)\cdot k} &\to M(d \times d, \mathbb{R})^2 \\ (m_{1,1}, \ldots, m_{1,k}, m_{2,k} \ldots, m_{N+1,k}) &\mapsto (m_{1,1} \cdots m_{1,k} \cdots m_{N,k}, m_{1,1} \cdots m_{1,k} \cdots m_{N+1,k}), \end{aligned}$$

um ein $\eta > 0$ zu finden, so dass für alle Matrizen

$$(\mathbf{m}', \mathbf{m}'') \in h\Big(\big(B_\eta(m_1) \times \cdots \times B_\eta(m_k)\big)^{N+1}\Big)$$

gilt, dass

$$|\left\|\frac{x\mathbf{m}^N}{\lambda_1^N}\right\| - \left\|\frac{x\mathbf{m}'}{\lambda_1^N}\right\|| < \frac{\delta'}{3}, \quad |\left\|\frac{x\mathbf{m}^{N+1}}{\lambda_1^{N+1}}\right\| - \left\|\frac{x\mathbf{m}''}{\lambda_1^{N+1}}\right\|| < \frac{\delta'}{3},$$

$$\left\|(x\mathbf{m}^N)^\sim - (x\mathbf{m}')^\sim\right\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left\|(x\mathbf{m}^{N+1})^\sim - (x\mathbf{m}'')^\sim\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $x \in S$. Zusammen mit den obigen Abschätzungen haben wir dann

$$\left\|(x\mathbf{m}')^\sim - y\right\| < \varepsilon, \quad \left\|(x\mathbf{m}'')^\sim - y\right\| < \varepsilon,$$

$$|\left\|\frac{x\mathbf{m}'}{\lambda_1^N}\right\| - 1| < \delta', \quad |\left\|\frac{x\mathbf{m}''}{\lambda_1^{N+1}}\right\| - 1| < \delta'$$

für alle $x \in A$, woraus (mit der Stetigkeit des Logarithmus) schließlich für alle $\in A$ folgt

$$|\log\|x\mathbf{m}'\| - N\log\lambda_1| < \delta, \quad |\log\|x\mathbf{m}''\| - (N+1)\log\lambda_1| < \delta.$$

Setzen wir nun $z := N\log\lambda_1$, $l_1 := Nk$, $l_2 := (N+1)k$, so haben wir für alle $x \in A$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x\left(\|X_{l_1} - y\| < \varepsilon,\ |V_{l_1} - z| \le \delta\right)\\
&= \mathbb{P}_x\left(\|X_{Nk} - y\| < \varepsilon,\ |V_{Nk} - N\log\lambda_1| \le \delta\right)\\
&\ge \mathbb{P}_x\left(M_{rk+i} \in B_\eta(m_i),\ 1 \le i \le k, 0 \le r < N\right) > 0,
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x\left(\|X_{l_2} - y\| < \varepsilon,\ |V_{l_2} - z - \log\lambda_1| \le \delta\right)\\
&\ge \mathbb{P}_x\left(M_{rk+i} \in B_\eta(m_i),\ 1 \le i \le k, 0 \le r < N+1\right) > 0;
\end{aligned}$$

da die endlich-dimensionalen Randverteilungen $\mathbb{P}_x^{(M_1,\dots M_{(N+1)k})}$ und $\mathbf{P}^{(M_1,\dots M_{(N+1)k})}$ für alle $x \in S$ äquivalent sind (vgl. 3.1.4), und

$$\mathbf{P}\left(M_{rk+i} \in B_\eta(m_i),\ 1 \le i \le k, 0 \le r < N+1\right) > 0,$$

da $m_i \in \operatorname{supp}(\mathbf{P}^{M_1})$ für alle $1 \le i \le k$.

Schließlich ist y nach Korollar 3.12 topologisch rekurrent, und damit trägt A als Umgebung von y positive Masse unter jeder stationären Verteilung π, insbesondere ist also $\pi(A) > 0$. $\square$

3.3. Zusammenfassung

Fassen wir nun das bisher Bewiesene in einem Satz zusammen:

3.17 Satz

Gegeben sei eine unter $\mathbf{P}$ *unabhängig identisch verteilte Folge* $(M_n)_{n\geq 1}$ *von Zufallsmatrizen, sowie eine unter* $\mathbf{P}$ *invariante Teilmenge* $S \subset S^{d-1}$ *und ein maßdefinierendes Paar* $(r, \varkappa)$. *In dem so definierten Modell* $\mathfrak{M}'$ *ist* $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ *ein Standard-MRW.*
Es gelte weiterhin

1. $\mathbb{P}_x\left(\exists C > 0 \text{ mit } \|x\Pi_n\| \geq C \cdot \|\Pi_n\| \ \forall n \geq 0\right) = 1$ *für alle* $x \in S$.
2. *Die von*
   $\{\log \lambda_1(\boldsymbol{m}) \ : \ \boldsymbol{m} \text{ zulässig, } \min_{x\in S} \ xa^t > 0 \text{ für einen rechten Eigenvektor } a^t \text{ zu } \lambda_1(\mathbf{m})\}$
   erzeugte Gruppe ist dicht in $\mathbb{R}$.
3. $\mathbf{E}\left[\|M_1\|^{\varkappa} \log^+ \|M_1\|\right] < \infty$.

Dann ist $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ *stetig in den Anfangsbedingungen, besitzt eine stationäre Verteilung* π, *so dass für alle offenen* $A \subset S$ *und alle* $x \in S$

$$\pi(A) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x\left(X_n \in A \text{ unendlich oft}\right) = 1$$

gilt, und $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ *ist schwach nichtarithmetisch bzgl.* π.
Außerdem gilt für ein $\alpha \in [-\infty, \infty)$, *dass*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} \equiv \alpha = \mathbb{E}_\pi\left[V_1\right] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Ist $\alpha > 0$, *so sind damit die Voraussetzungen des Markov-Erneuerungstheorems 1.13 und 1.14 erfüllt.*

Beachte, dass die Teilmenge S durch Bedingung 2 bereits derart eingeschränkt wird, dass sie vollständig in einem Halbraum des $\mathbb{R}^d$ enthalten sein muss.

Beweis. Nach Satz 3.8 ist $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ unter diesen Voraussetzungen stetig in den Anfangsbedingungen. Satz 3.11 liefert uns die Existenz eines topologisch rekurrenten x^*, und nach Satz 3.14 gibt es eine stationäre Verteilung π für $(X_n)_{n\geq 0}$ mit den geforderten Eigenschaften (Beachte $\mathbf{E}\left[\|M_1\|^{\varkappa}\right] < \exp\varkappa + \mathbf{E}\left[\|M_1\|^{\varkappa}\log^+\|M_1\|\right] < \infty$). Schließlich

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\pi\left[V_1^+\right] &= \int \pi(dx)\frac{1}{r(x)}\mathbf{E}\left[\|xM_1\|^{\varkappa} r((xM_1)^{\sim})\log^+\|xM_1\|\right]\\ &\leq \int \pi(dx)\max_{z_1,z_2\in S}\frac{r(z_1)}{r(z_2)}\mathbf{E}\left[\|M_1\|^{\varkappa}\log^+\|M_1\|\right]\\ &\leq \max_{z_1,z_2\in S}\frac{r(z_1)}{r(z_2)}\mathbf{E}\left[\|M_1\|^{\varkappa}\log^+\|M_1\|\right] < \infty.\end{aligned}$$

Also lässt sich Korollar 1.16 anwenden, und es gibt ein $\alpha = \mathbb{E}_\pi[V_1] \in [-\infty,\infty)$ mit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{n} \equiv \alpha \quad \mathbb{P}\text{-}f.s. \qquad \square$$

3.4. Gegenbeispiel zur Harris-Rekurrenz

Um eine Abgrenzung zwischen der Anwendbarkeit des Kesten'schen Erneuerungstheorems und der Version, welche die Harris-Rekurrenz von $(X_n)_{n\geq 0}$ voraussetzen, zu bekommen, geben wir eine Folge von Zufallsmatrizen an, für die $(X_n)_{n\geq 0}$ nicht Harris-rekurrent ist, aber dennoch die Voraussetzungen von Satz 3.17 mit $\alpha > 0$ erfüllt.

Es seien λ_1, λ_2 $\boldsymbol{\lambda}$-stetig verteilte Zufallsgrößen mit $1 < \lambda_2 < \lambda_1 < c < \infty$. Sei $\mathbf{P}^{M_1}$ die Verteilung der durch

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

definierten Zufallsmatrix. Setze

$$S := \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| = 1 \text{ und } \langle e_1, x\rangle \geq c\}$$

für ein $c > 0$. M ist offenbar selbstadjungiert, also $\langle e_1, Mx\rangle = \langle Me_1, x\rangle = \lambda_1\langle e_1, x\rangle$, und damit

$$\mathbf{P}\left(xM_1 = 0 \text{ oder } (xM_1)^{\sim} \notin S\right) = 0;$$

sowie $\|M\| = \lambda_1$.

Setze $r \equiv 1$, $\varkappa = 0$, dann sind die Bedingungen aus 3.2 erfüllt. Für alle $x \in S$ gilt $\|x\Pi_n\| \geq |\langle e_1, x\rangle| \cdot \|e_1\Pi_n\| = |\langle e_1, x\rangle| \cdot \|\Pi_n\|$, woraus

$$\mathbb{P}_x\left(\exists C > 0 \text{ mit } \|x\Pi_n\| \geq C \cdot \|\Pi_n\| \ \forall n \geq 0\right) = 1 \quad \forall x \in S$$

folgt. Weiterhin ist $\mathbf{E}\left[\log^+ \|M_1\|\right] = \mathbf{E}\lambda_1 < \infty$, da λ_1 beschränkt. Die von

$$\{\log \lambda_1(\mathbf{m}) \ : \ \mathbf{m} \text{ zulässig, } \min_{x\in S} \langle x, a\rangle > 0 \text{ für einen rechten Eigenvektor } a \text{ zu } \lambda_1(\mathbf{m})\}$$

erzeugte Gruppe ist offensichtlich dicht in $\mathbb{R}$, da λ_1 stetig verteilt ist und M_1 selbst bereits zulässig ist. Damit sind die Voraussetzungen von 3.17 erfüllt.

Bereits aus dem starken Gesetz der großen Zahlen folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|M_1 \cdots M_n\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(\lambda_1)^n = \mathbf{E}\log\lambda_1 > 0.$$

Also ist das Markov-Erneuerungstheorem 1.13 anwendbar.

Hingegen ist $(X_n)_{n\geq 0}$ nicht Harris-rekurrent: Jede Rekurrenzmenge für $(X_n)_{n\geq 0}$ muss eine offene Umgebung des Vektors e_1 enthalten; denn einzige stationäre Verteilung ist δ_{e_1}, und $\{e_1\}$ ist keine Rekurrenzmenge, da $x\Pi_n \neq e_1$ für alle $x \neq e_1$ und $n \geq 1$. Angenommen, $(X_n)_{n\geq 0}$ wäre Harris-rekurrent. Dann existiert ein W-Maß φ auf S, $\beta > 0$, $l \geq 1$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $y \in B_{2\varepsilon}(e_1)$ gilt

$$P^l(y, A) \geq \beta \cdot \varphi(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}.$$

Sei nun $A \in \mathcal{S}$ mit $\varphi(A) > 0$. Da φ als W-Maß regulär ist, kann A von innen durch kompakte Mengen A_n approximiert werden, so dass $\lim_{n\to\infty} \varphi(A_n) = \varphi(A)$; insbesondere $\varphi(A_n) > 0$ für geeigetes n. Dann finden wir aber für jedes $\delta > 0$ ein $x \in A_n$, so dass $\varphi(B_\delta(x)) > 0$, indem wir A_n mit δ-Bällen überdecken und die Subadditivität von φ nutzen. OBdA können wir annehmen, dass $P^l(e_1, B_\delta(x)) > 0$, sonst sind wir fertig. Dann kann aber bereits $x = e_1$ gewählt werden. Betrachte

$$y = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

also gilt $\|e_1 - y\| = \varepsilon < 2\varepsilon$. Nun ist aber

$$\begin{aligned} \|e_1 - (y\Pi_l)^\sim\| &\geq 1 - \frac{\lambda_1^l \sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{\lambda_1^{2l}(1-\varepsilon) + \lambda_2^{2l}\varepsilon}} \\ &\geq 1 - \frac{\lambda_1^l \sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{\lambda_1^{2l}(1-\varepsilon) + \varepsilon}} > 0. \end{aligned}$$

Da $\delta > 0$ beliebig gewählt werden darf, können wir es so klein wählen, dass $(y\Pi_l) \notin B_\delta(e_1)$. Dann folgt $P^l(y, B_\delta(e_1)) = 0$, und damit ein Widerspruch zur angenommenen Harris-Rekurrenz.

3.5. Der Fall positiver Zufallsmatrizen

Nachdem wir in einem etwas allgemeineren Setting die Voraussetzungen des Markov-Erneuerungstheorems nachgewiesen haben, wenden wir uns nun dem speziellen Fall der positiven Matrizen zu. Wir bedienen uns dabei folgender

Notation
Für Vektoren $x \in R^d$ schreiben wir $x \geq 0$, falls $x_i \geq 0$ für alle $1 \leq i \leq d$, und $x > 0$, falls $x_i > 0$ für alle $1 \leq i \leq d$. Die Menge der normierten positiven Vektoren bezeichnen wir mit

$$S_+ := \{x \in S^{d-1} \ : \ x \geq 0\}.$$

Für Matrizen $M \in M(d \times d, \mathbb{R})$ schreiben wir analog $M \geq 0$ $(M \gg 0)$, falls $M_{ij} \geq 0$ $(M_{ij} > 0)$ für alle $1 \leq i, j \leq d$.

3.18 Lemma
Es gelte

$$\mathbf{P}\left(M_1 \geq 0\right) = 1 \tag{3.5.1}$$

$$\mathbf{P}\left(M_1 \text{ hat eine Nullzeile}\right) = 0 \tag{3.5.2}$$

Dann ist S_+ invariant für $\mathbf{P}$. Für ein maßdefinierendes Paar $(r, \varkappa)$ gelte

$$\mathbf{E}\left[\|M_1\|^\varkappa \log^+ \|M_1\|\right] < \infty. \tag{3.5.3}$$

In dem mit S_+ und $(r, \varkappa)$ definierten Modell sei die Stoppzeit

$$T_\gg := \inf\{n \geq 1 \ : \ \Pi_n \gg 0\}$$

$\mathbb{P}_x$-f.s. endlich für alle $x \in S_+$. Schließlich sei die von

$$G := \left\{\log \lambda_1(m) \ : \ m \gg 0; \ m = m_1 \cdots m_n \text{ für ein } k \geq 1 \text{ und } m_i \in \operatorname{supp}(\mathbf{P}^{M_1})\right\}$$

erzeugte Gruppe dicht in $\mathbb{R}$.
Dann bildet (X_n, V_n) (wie in 3.4 definiert) einen Standard-MRW, und für ein $\alpha \in$

$[-\infty,\infty)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{n}\equiv\alpha=\mathbb{E}_\pi\left[V_1\right]\quad\mathbb{P}\text{-}f.s.$$

Ist $\alpha>0$, so sind damit die Voraussetzungen des Markov-Erneuerungstheorems 1.13 und 1.14 erfüllt.

Beweis. Für $x\in S_+$ und $M\geq 0$ ist $(xM)_i=\sum_{j=1}^d x_jM_{ji}\geq 0$, und sogar $(xM)_i>0$ für ein $1\leq i\leq d$, falls M keine Nullzeile besitzt. Also folgt aus (3.5.1) und (3.5.2), dass

$$\mathbf{P}\left(xM_1=0\text{ oder }(xM_1)^\sim\notin S_+\right)=0.$$

Wir befinden uns also in der Situation von Satz 3.18, und prüfen nun die dort zusätzlich genannten Voraussetzungen: Eine Matrix $m\gg 0$ besitzt nach dem Satz von Perron-Frobenius (z.B. [3], 15.4) einen algebraisch einfachen, betraglich größten Eigenwert $\lambda_1(m)>0$; und ein zugehöriger rechter Eigenvektor a^t kann so gewählt werden, dass $a>0$. Für $x\in S_+$ gilt dann

$$\min_{x\in S_+}\langle x,a\rangle=\min_{x\in S_+}\sum_{i=1}^d x_ia_i\geq\min_{x\in S_+}\min_{1\leq j\leq d}a_j\sum_{i=1}^d x_i.$$

Nun ist $\sum_{i=1}^d x_i$ auf der kompakten Menge S_+ stetig und positiv, demnach

$$\min_{x\in S_+}\sum_{i=1}^d x_i>0,$$

und damit auch $\min_{x\in S_+}\langle x,a\rangle>0$ (vgl. auch Ungleichung 2). Also gilt

$$G\subset\{\log\lambda_1(m)\ :\ m\text{ zulässig; }\min_{x\in S}\langle x,a\rangle>0\text{ für einen rechten Eigenvektor }a\text{ zu }\lambda_1(m)\},$$

und bereits die von G erzeugte Gruppe liegt nach Voraussetzung dicht in $\mathbb{R}$.

Sei $x\in S_+$, $m\geq 0$ eine beliebige nichtnegative Matrix. Dann gilt

$$\|xm\|\overset{Ugl.5}{\geq}d^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^d x_im_i\overset{(xm)_{ij}\geq 0}{\geq}d^{-\frac{1}{2}}\min_{1\leq l\leq d}x_l\sum_{i,j}m_{ij}\overset{Ugl.4}{\geq}d^{-\frac{1}{2}}\min_{1\leq l\leq d}x_l\|m\|.$$

Im Fall $x>0$ folgt daraus bereits

$$\mathbb{P}_x\left(\exists C>0\text{ mit }\|x\Pi_n\|\geq C\cdot\|\Pi_n\|\ \forall n\geq 0\right)=1,$$

es kann $C = d^{-\frac{1}{2}} \min x_l$ gewählt werden.

Gilt nur $x \geq 0$, so beachte, dass $xm > 0$ für jede Matrix $m \gg 0$. Auf der Menge $\{T_{\gg} < \infty\}$ ist also $x\Pi_{T_{\gg}} > 0$, und für alle $n \geq T_{\gg}$ gilt somit nach obiger Abschätzung

$$\begin{aligned}\|x\Pi_n\| &\geq \|(xM_1 \cdots M_{T_{\gg}})M_{T_{\gg}+1} \cdots M_n\| \\ &\geq d^{-\frac{1}{2}} \min_{1 \leq l \leq d} (x\Pi_{T_{\gg}})_l \, \|M_{T_{\gg}+1} \cdots M_n\| \\ &\geq d^{-\frac{1}{2}} \min_{1 \leq l \leq d} (x\Pi_{T_{\gg}})_l \, (\|\Pi_{T_{\gg}}\|)^{-1} \|\Pi_n\|.\end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurde die Submultiplikativität der Matrizennorm genutzt; es folgt

$$\mathbb{P}_x \left(\exists C > 0 \text{ mit } \|x\Pi_n\| \geq C \cdot \|\Pi_n\| \; \forall n \geq T_{\gg}\right) = 1.$$

Beachte, dass die Konstante C hier vom jeweiligen Pfad abhängig ist. Schließlich folgt aus (3.5.1), dass $\mathbb{P}_x (x\Pi_n = 0) = 0$ für alle $n \geq 1$, also gilt unter Beachtung von $\mathbb{P}_x (T_{\gg} < \infty) = 1$, dass

$$\mathbb{P}_x \left(\exists C > 0 \text{ mit } \|x\Pi_n\| \geq C \cdot \|\Pi_n\| \; \forall n < T_{\gg}\right) = \mathbb{P}_x \left(\min_{n < T_{\gg}} \|x\Pi_n\| \cdot \|\Pi_n\|^{-1} > 0 \right) = 1.$$

Somit sind die Voraussetzungen von Satz 3.17 erfüllt, dieser liefert gerade die Behauptungen. $\square$

4. Produkte positiver Zufallsmatrizen - positiver Ljapunov-Exponent

4.1. Der Satz von Furstenberg-Kesten für Produkte von positiven Zufallsmatrizen

Bevor wir nun zur Anwendung des Markov-Erneuerungstheorems schreiten, können wir die bereits in der Einleitung angekündigte Erweiterung des Satzes von Furstenberg-Kesten für positive Matrizen beweisen.

In diesem Kapitel sei dabei stets ein Modell $\mathfrak{M}$ zu Grunde gelegt, mit $S = S_+$, $r \equiv 1$ und $\varkappa = 0$, d.h. insbesondere ist für jedes $x \in S^+$

$$\mathbb{P}_x^{(M_n)_{n\geq 1}} = \mathbf{P}^{(M_n)_{n\geq 1}}.$$

4.1 Satz
Es sei $(M_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von unter $\mathbf{P}$ unabhängig identisch verteilten Zufallsmatrizen. Es gelte

$$\mathbf{P}\left(M_1 \geq 0\right) = 1 \tag{4.1.1}$$

$$\mathbf{P}\left(M_1 \text{ hat eine Nullzeile}\right) = 0 \tag{4.1.2}$$

$$\mathbf{E}\left[\log^+ \|M_1\|\right] < \infty, \tag{4.1.3}$$

und die von

$$G := \left\{\log \lambda_1(\boldsymbol{m}) \;:\; \boldsymbol{m} \gg 0, \boldsymbol{m} = m_1 \cdots m_n \text{ für ein } k \geq 1 \text{ und } m_i \in \operatorname{supp}(\mathbf{P}^{M_1})\right\}$$

erzeugte Gruppe sei dicht in $\mathbb{R}$. Dann existiert ein $\alpha < \infty$, so dass für alle $x \in S_+$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|M_1 \cdots M_n\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|xM_1 \cdots M_n\| = \alpha \quad \mathbf{P}\text{-}f.s.$$

Beweis. Wir wollen Lemma 3.18 anwenden. Wie eingangs erwähnt, ist $\varkappa = 0$ und $r \equiv 1$.

Die Voraussetzungen des Lemmas sind also erfüllt, sofern wir zeigen können, dass $T_{\gg}$ $\mathbb{P}_x$-*f.s.* endlich ist für alle $x \in S$.

Da G nichtleer ist, gibt es ein $k \geq 1$ und $m_1, \ldots, m_k \in \operatorname{supp}(\mathbf{P}^{M_1})$, so dass

$$\mathbf{m} = m_1 \cdots m_k \gg 0.$$

Aufgrund der Stetigkeit der Matrizenmultiplikation können wieder Umgebungen der m_i gewählt werden, die positive Wahrscheinlichkeit unter $\mathbf{P}^{M_1}$ tragen, und wir erhalten $\mathbb{P}_x(\Pi_k \gg 0) > 0$. Mit dem Borel-Cantelli-Lemma folgt (da $(M_n)_{n\geq 1}$ iid), dass $\mathbb{P}_x(\Pi_n \gg 0 \text{ u.o.}) = 1$, und damit die $\mathbb{P}_x$-*f.s.* Endlichkeit von $T_{\gg}$.

Somit sind die Voraussetzungen von Satz 3.17 erfüllt, und wir erhalten für ein geeignetes $\alpha \in [-\infty, \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|xM_1 \cdots M_n\| = \alpha \quad \mathbb{P}_x\text{-}f.s.$$

für alle $x \in S$. Beachte nun, dass $\mathbb{P}_x^{(M_n)_{n\geq 1}} = \mathbf{P}^{(M_n)_{n\geq 1}}$ für alle $x \in S_+$; und (3.1.4) sich zu

$$\mathbb{E}_x\left[f((X_n, V_n)_{n\geq 0})\right] = \mathbf{E}\left[f(x, 0, (xM_1)^{\sim}, \log \|xM_1\|, \ldots)\right] \tag{4.1.4}$$

vereinfacht. Also liefert uns die Konvergenz insbesondere

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|xM_1 \cdots M_n\| = \alpha\right) = 1$$

für alle $x \in S_+$, und es bleibt nur noch $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|M_1 \cdots M_n\| = \alpha$ $\mathbf{P}$-*f.s.* zu zeigen.

Klar ist, dass

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|M_1 \cdots M_n\| \geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|xM_1 \cdots M_n\| = \alpha \ \ \mathbf{P}\text{-}f.s.$$

für alle $x \in S_+$. Andererseits gilt für alle $x \in S^{d-1}$ (e_i = i-ter Einheitsvektor)

$$\begin{aligned}\|xM_1 \cdots M_n\| &\leq \|x_1 e_1 M_1 \cdots M_n\| + \cdots + \|x_d e_d M_1 \cdots M_n\| \\ &\leq d \cdot \max_{1\leq l\leq d} \|e_l M_1 \cdots M_n\|,\end{aligned}$$

also nach Supremumsbildung

$$\frac{1}{n} \log \|M_1 \cdots M_n\| \leq \frac{1}{n} \log \max_{1\leq l\leq d} \|e_l M_1 \cdots M_n\| + \frac{\log d}{n}$$

für alle $n \geq 1$. Damit gilt $\mathbf{P}$-*f.s.*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|M_1 \cdots M_n\| \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \max_{1\leq l\leq d} \|e_l M_1 \cdots M_n\| + \frac{\log d}{n} = \alpha$$

(betrachte das Maximum pfadweise). Zusammen folgt mit dem Schachtelungssatz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|M_1 \cdots M_n\| = \alpha \quad \mathbf{P}\text{-}\mathit{f.s.}$$ □

4.2 Bemerkung

Um die vollständige Aussage des Satzes von Furstenberg-Kesten zu erhalten, müsste noch die gleichgradige Integrierbarkeit der Folge $\frac{1}{n} \log \|M_1 \cdots M_n\|$ bzgl. $\mathbf{P}$ gezeigt werden (so dies möglich ist), oder auf anderem Wege die Konvergenz des Erwartungswertes und Gleichheit gezeigt werden. Letztere Vorgehensweise wird im Beweis des Satzes von Furstenberg-Kesten angewendet (siehe [9]).

4.2. Erneuerungstheorie für Produkte positiver Zufallsmatrizen

Wir haben soeben gezeigt, dass der Ljapunov-Exponent der Folge $(M_n)_{n\geq 0}$ in unserem Modell gleich der Drift α des Markov-Random-Walks $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ ist, was die gleiche Benennung rechtfertigt. Zugleich haben wir (mittels Lemma 3.18) die Voraussetzungen des Markov-Erneuerungstheorems nachgeprüft; dieses ist also im Falle eines positiven Ljapunov-Exponenten $\alpha > 0$ anwendbar. Wir erhalten nun das erste der angekündigten Resultate, eine Art Blackwellsches Erneuerungstheorem für Produkte positiver Zufallsmatrizen. Dabei bedienen wir uns folgender

Notation

Für eine Folge $(M_n)_{n\geq 0}$ von Zufallsmatrizen definiere für $x \in S^{d-1}$ die Stoppzeit

$$\tau_x(t) := \inf\{n \geq 0 \ : \ \log \|xM_1 \cdots M_n\| > t\} = \inf\{n \geq 0 \ : \ \|xM_1 \cdots M_n\| > e^t\},$$

sowie auf dem Ereignis $\{\tau_x(t) < \infty\}$ die Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} Z_x(t) &:= (xM_1 \cdots M_{\tau_x(t)})^\sim \\ R_x(t) &:= \log \|xM_1 \cdots M_{\tau_x(t)}\| - t. \end{aligned}$$

4.3 Satz

Es seien die Voraussetzungen von Satz 4.1 erfüllt; und es gelte $\alpha > 0$. Dann existiert für jede stetige Funktion $g : S_+ \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ und jedes $x \in S_+$ der Grenzwert

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\left[g(Z_x(t), R_x(t))\mathbb{1}_{\{\tau_x(t)<\infty\}}\right];$$

und sein Wert ist unabhängig von x. Der Grenzwert ist außerdem strikt positiv, falls g strikt positiv ist.
Weiterhin existiert ein W-Maß π auf S_+, so dass für jede stetige Funktion $g : S_+\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sup\{|g(y,t)| \ : \ y \in S_+, t \in [l, l+1]\} \tag{4.2.1}$$

erfüllt, und für jedes $x \in S_+$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} g\Big((x\Pi_n)^{\sim}, t - \log\|x\Pi_n\|\Big)\right] = \alpha^{-1} \int_{S_+}\int_{\mathbb{R}} g(y,s)\lambda(ds)\pi(dy).$$

Insbesondere gilt für jedes $x \in S_+$, $h \geq 1$, dass

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\left[\#\{n \geq 0 : t \leq \|xM_1\cdots M_n\| \leq th\}\right] = \alpha^{-1}\log h.$$

Beweis. Wir haben bereits im Beweis von Satz 4.1 gesehen, dass im Falle $\alpha > 0$ das Markov-Erneuerungstheorem auf den zugehörigen MRW $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ anwendbar ist. Erinnern wir uns an die Eigenschaften von $\mathbb{P}_x$ und $\mathbf{P}$ (siehe (4.1.4)), so liefert der zweite Teil des Markov-Erneuerungstheorems die Existenz von

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x\left[g(Z(t), R(t)) \cdot \mathbb{1}_{\{\tau(t)<\infty\}}\right] = \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\left[g(Z_x(t), R_x(t)) \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_x(t)<\infty\}}\right];$$

und an der konkreten Gestalt

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x\left[g(Z(t), R(t))\mathbb{1}_{\{\tau(t)<\infty\}}\right] = \alpha^{-1} \int_S \int_{S\times(0,\infty)} \int_{[0,z)} g(v,w)\,\lambda(dw)\,P^{>}(y, dv\times dz)\pi^{>}(dy)$$

sehen wir, dass dieser unabhängig von x ist, sowie strikt positiv, falls g strikt positiv ist.

Um den ersten Teil des Markov-Erneuerungstheorems anwenden zu können, müssen wir nachweisen, dass (4.2.1) bereits die direkte Riemann-Integrierbarkeit von g impliziert.

Wegen

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|x\Pi_n\| = \alpha\right) = 1$$

für ein $\alpha > 0$ und alle $x \in S_+$ gibt es ein $k_0 \geq 1$, so dass (e_i =i-ter Einheitsvektor)

$$\mathbf{P}\left(\log\|e_i\Pi_m\| \geq mk_0^{-1} + \frac{1}{2}\log d \;\; \forall m \geq k_0 \text{ und } 1 \leq i \leq d\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Nun gilt für Vektoren $x \in S_+$ und Matrizen $\mathbf{m} \geq 0$, dass

$$\begin{aligned}\|x\mathbf{m}\| &= \|\sum_{l=1}^{d} x_l(e_l\mathbf{m})\| \geq \|\sum_{l=1}^{d} x_l \min_{1\leq i\leq d}(e_i\mathbf{m})\| \\ &\geq \max_{1\leq l\leq d} x_l \min_{1\leq i\leq d}\|(e_i\mathbf{m})\| \geq d^{-\frac{1}{2}}\min_{1\leq i\leq d}\|(e_i\mathbf{m})\|.\end{aligned}$$

Nach Logarithmieren folgt

$$\mathbf{P}\left(\log\|x\Pi_m\| \geq mk_0^{-1} \;\; \forall m \geq k_0\right) \geq \frac{1}{2},$$

dann ist aber $C_k = S$ für alle $k \geq k_0$. Die Summe über k in (1.2.2) ist somit endlich, und es gilt

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}(k+1)\sup\{|g(x,t)| \;:\; x \in C_{k+1}\backslash C_k,\; l \leq t \leq l+1\} \\ \leq &\sum_{k=0}^{k_0}\sum_{l=-\infty}^{\infty}(k+1)\sup\{|g(x,t)| \;:\; x \in S_+,\; l \leq t \leq l+1\} < \infty\end{aligned}$$

nach (4.2.1). Da mit g insbesondere $g(x,\cdot)$ stetig ist für alle $x \in S_+$, folgt die gewöhnliche Riemann-Integrierbarkeit auf kompakten Intervallen direkt aus dem Hauptsatz der Integralrechnung. Wir können nun 1.13 anwenden, und erhalten für alle $x \in S_+$

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} g\Big((x\Pi_n)^{\sim}, t - \log\|x\Pi_n\|\Big)\right] \\ &= \lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{\infty} g(X_n, t - V_n)\right] = \lim_{t\to\infty} g * U_x(t) \\ &= \alpha^{-1}\int_{S_+}\int_{\mathbb{R}} g(y,s)\lambda\!\!\lambda(ds)\pi(dy);\end{aligned}$$

wobei π die stationäre Verteilung für $(X_n)_{n\geq 0}$ ist, die wir wählen mussten, um das

Markov-Erneuerungstheorem anwenden zu können.

Für Funktionen $g : S_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(y,s) := \tilde{g}(s)$, wobei $\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger ist, ist (4.2.1) stets erfüllt, und obige Konvergenzaussage liefert uns

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{g}(\log\|x\Pi_n\| - t)\right] = \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(-s)\lambda\!\!\lambda(ds) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(s)\lambda\!\!\lambda(ds),$$

also die vage Konvergenz von

$$\mathbf{U}(t+\cdot) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(\log\|x\Pi_n\| \in t+\cdot\right) = \mathbf{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{t+\cdot}(\log\|x\Pi_n\|)\right]$$

gegen $\alpha^{-1}\lambda\!\!\lambda$. Insbesondere gilt dann nach dem Portmanteautheorem für die vage Konvergenz ([4], 43.6) für jedes beschränkte Intervall I, dass

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{t+I}(\log\|x\Pi_n\|)\right] = \alpha^{-1}\lambda\!\!\lambda(I).$$

Für $h \geq 1$ folgt nun

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\left[\#\{n \geq 0 \ : \ t \leq \|xM_1\cdots M_n\| \leq th\}\right] \\
=&\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{t+[0,\log h]}(\log\|x\Pi_n\|)\right] \\
=&\alpha^{-1}\lambda\!\!\lambda([0,\log h]) = \alpha^{-1}\log h.
\end{aligned}$$

□

5. Produkte positiver Zufallsmatrizen - negativer Ljapunov-Exponent

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Folgen von positiven Zufallsmatrizen, für deren Ljapunovexponenten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \|M_1 \cdots M_n\| =: \beta < 0 \quad \mathbf{P}\text{-}f.s.$$

gilt. Im letzten Kapitel haben wir bereits gezeigt, dass das Markov-Erneuerungstheorem auf Folgen von positiven Matrizen anwendbar ist. Allerdings galt dort $\beta > 0$, wir konnten $r \equiv 1$ und $\varkappa = 0$ wählen und das Markov-Erneuerungstheorem direkt anwenden.

Dies ist hier offensichtlich nicht mehr möglich; jedoch können wir nun die Freiheiten in der Wahl von r und $\varkappa$ nutzen, um Verteilungen $(\mathbb{P}_x)_{x\in S_+}$ zu erhalten, unter denen das Markov-Erneuerungstheorem anwendbar ist, insbesondere also $\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} > 0$ $\mathbb{P}$-$f.s.$ gilt. Durch Vergleich mit der Verteilung $\mathbf{P}$ werden wir daraus Konvergenzraten für

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left(\sup_{n\geq 1} \|xM_1 \cdots M_n\| > t\right) = 0$$

herleiten können. Zur Unterscheidung bezeichnen wir im Folgenden den $\mathbf{P}$-$f.s.$-Limes von $\frac{1}{n}\|\Pi_n\|$ mit β, und den $\mathbb{P}$-$f.s.$-Limes mit α.

Die Hauptarbeit besteht darin, ein $\varkappa$ so zu bestimmen, dass eine stetige Funktion $r : S_+ \to (0,\infty)$ mit der geforderten Eigenschaft

$$r(x) = \mathbf{E}\left[\|M_1\|^{\varkappa} r((xM_1)^{\sim})\right]$$

für alle $x \in S_+$ existiert. Anschließend muss noch gezeigt werden, dass mit den transformierten Maßen $\alpha > 0$ gilt, und dass das Markov-Erneuerungstheorem anwendbar ist. Die Herleitung der Konvergenzrate geschieht dann wie im Überblick bereits kurz vorgestellt.

Die Bedingung an r lässt sich auch so lesen, dass r eine positive Eigenfunktion zur

Abbildung $T_\varkappa \ : \ C_b(S) \to C_b(S)$,

$$T_\varkappa f(x) := \mathbf{E}\left[\|xM_1\|^\varkappa f((xM_1)^\sim)\right]$$

sein muss. Wir werden zunächst zeigen, dass es eine Funktion $\varrho_\varkappa : [0, \varkappa_0] \to (0, \infty)$, und für jedes $\varkappa \in [0, \varkappa_0]$ eine stetige positive Funktion $r_\varkappa : S_+ \to (0, \infty)$ gibt mit

$$T_\varkappa r_\varkappa = \varrho_\varkappa r_\varkappa.$$

Anschließend zeigen wir, dass $\varrho_{\varkappa_1} = 1$ für ein eindeutig bestimmtes $\varkappa_1 \in [0, \varkappa_0]$.

5.1. Existenz von Eigenfunktionen $r_\varkappa$

Wir werden folgenden Satz beweisen:

5.1 Satz
Es gelte:

1. $\mathbf{P}(M_1 \geq 0) = 1$ *und* $\mathbf{P}(M_1$ *hat Nullzeile*$) = 0$.
2. *Die von*

$$G := \left\{\log \lambda_1(\boldsymbol{m}) \ : \ \boldsymbol{m} = m_1 \cdots m_n \text{ für ein } k \geq 1 \text{ und } m_i \in \operatorname{supp}(\mathbf{P}^{M_1}); \boldsymbol{m} \gg 0\right\}$$

erzeugte Gruppe sei dicht in $\mathbb{R}$.

Es existiere ein $\varkappa_0 > 0$, *so dass gelte*

3. $\mathbf{E}\left[\|M_1\|^{\varkappa_0} \log^+ \|M_1\|\right] < \infty$,
4. $\mathbf{E}\left[\left(\min_{1 \leq i \leq d} \sum_{j=1}^d M_1(i,j)\right)^{\varkappa_0}\right] \geq d^{\frac{1}{2}}$.

Dann gibt es für jedes $\varkappa \in [0, \varkappa_0]$ *ein* $\varrho_\varkappa > 0$ *und eine stetige Funktion* $r_\varkappa : S_+ \to (0, \infty)$, *so dass für jedes* $\varkappa$ *und jedes* $x \in S_+$ *gilt*

$$\mathbf{E}\left[\|xM_1\|^\varkappa r((xM_1)^\sim)\right] = \varrho_\varkappa r(x).$$

Außerdem folgt:

(a) $\log \varrho_\varkappa = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^\varkappa\right]$.

(b) Es gibt eine stetige Funktion $C : [0, \varkappa_0] \to (0, \infty)$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\varrho_\varkappa \geq \left(C(\varkappa)\varrho_\varkappa^{-n_0} \cdot \mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^\varkappa\right]\right)^{\frac{1}{n}}$$

für alle $n \geq 1$.

(c) $\varrho_0 = 1$ und $\varrho_{\varkappa_0} \geq 1$.

Diesen (umfangreichen) Satz werden wir in mehrere Lemmata aufteilen. Grundidee ist es, einen konstruktiven Beweis zu führen, und $r_\varkappa$ als Häufungspunkt der Folge

$$\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} \varrho_\varkappa^{-j}\, T_\varkappa^j\, \mathbb{1}_S$$

zu wählen. Dazu müssen wir den Satz von Arzelà-Ascoli anwenden, und also dessen Voraussetzungen, gleichgradige Stetigkeit und Beschränktheit der Folge, nachweisen. Dazu ist es unabdingdar, dass wir $\varrho_\varkappa$ so wählen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in S_+$

$$T_\varkappa^n\, \mathbb{1}_S(x) = O(\varrho_\varkappa^n)$$

(für $n \to \infty$). Dass, und wie dies möglich ist, zeigt folgendes Lemma:

5.2 Lemma
Es seien die Voraussetzungen von Satz 5.1 erfüllt. Dann gibt es eine stetige Funktion $C : [0, \varkappa_0] \to (0, \infty)$, ein $n_0 \geq 1$ und für jedes $0 \leq \varkappa \leq \varkappa_0$ eine Zahl $\varrho_\varkappa > 0$, so dass

$$\varrho_\varkappa^{-n_0} C(\varkappa)\,\|T_\varkappa^n\| \;\leq\; \varrho_\varkappa^{-n_0} C(\varkappa)\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^\varkappa\right] \;\leq\; \varrho_\varkappa^n \;\leq\; \varrho_\varkappa^{n_0} C(\varkappa)^{-1}\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^\varkappa\right] \tag{5.1.1}$$

für alle $n \geq 1$,

$$\varrho_\varkappa^{-n_0} C(\varkappa)\mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^\varkappa\right] \;\leq\; \varrho_\varkappa^n \;\leq\; \varrho_\varkappa^{n_0} C(\varkappa)^{-1}\mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^\varkappa\right] \tag{5.1.2}$$

für alle $n \geq 1$ und alle $x \in S$, sowie

$$\varrho_0 = 1 \text{ und } \varrho_{\varkappa_0} \geq 1.$$

Beweis.
1.SCHRITT : DEFINITION VON $\varrho_\varkappa$

Der oben eingeführte Operator

$$\begin{aligned} T_\varkappa &: C_b(S) \to C_b(S) \\ T_\varkappa f(x) &:= \mathbf{E}\left[\|xM_1\|^\varkappa f((xM_1)^\sim)\right] \end{aligned}$$

ist wohldefiniert, da f beschränkt ist, und

$$\mathbf{E}\left[\|M_1\|^\varkappa\right] \le \left(e^\varkappa + \mathbf{E}\left[\|M_1\|^\varkappa \log^+ \|M_1\|\right]\right) \le \left(e^{\varkappa_0} + \mathbf{E}\left[\|M_1\|^{\varkappa_0} \log^+ \|M_1\|\right]\right) < \infty.$$

Die Stetigkeit von Tf folgt direkt aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz (vgl. Beweis von 3.14). Nach Korollar A.12 ist die adjungierte Abbildung

$$T'_\varkappa : \mathbf{M}_{reg}(\mathcal{S}) \to \mathbf{M}_{reg}(\mathcal{S})$$

gegeben durch

$$\int (T'_\varkappa \nu)(dx) f(x) = \int \nu(dx)(T_\varkappa f)(x) = \int \nu(dx)\mathbf{E}\left[\|xM_1\|^\varkappa f((xM_1)^\sim)\right] \tag{5.1.3}$$

für alle $f \in C_b(S)$. Da

$$T_\varkappa f \ge 0 \text{ für } f \ge 0,\ T_\varkappa f > 0 \text{ für } f > 0,$$

ist $T'_\varkappa$ ein positiver Operator. Weiterhin folgt aus den Voraussetzungen wie im Beweis von 4.1, dass $xM_1 \neq 0$ $\mathbf{P}$-*f.s.*, und damit $\mathbf{E}\left[\|xM_1\|^\varkappa\right] > 0$. Somit ist

$$\begin{aligned} \tilde{T}_\varkappa &: \mathfrak{W}(\mathcal{S}) \to \mathfrak{W}(\mathcal{S}) \\ \nu &\mapsto (\|T'_\varkappa \nu\|)^{-1} T'_\varkappa \nu = \left(\int \nu(dx)\mathbf{E}\left[\|xM_1\|^\varkappa\right]\right)^{-1} T'_\varkappa \nu \end{aligned}$$

eine wohldefinierte Abbildung. Dabei bezeichnet $\mathfrak{W}(\mathcal{S})$ die Menge der W-Maße auf $\mathcal{S}$.

$\tilde{T}_\varkappa$ ist stetig bzgl. der schwachen Konvergenz: Zum einen ist $T'_\varkappa$ stetig bzgl. der schwachen Konvergenz, denn sei $(\nu_n)_{n\ge1}$ eine Folge von Maßen mit Grenzwert ν, so gilt, da $T_\varkappa f \in C_b(S)$ für alle $f \in C_b(S)$,

$$\begin{aligned} \nu_n \to \nu \Leftrightarrow \int f d\nu_n &\to \int f d\nu && \forall f \in C_b(S) \\ \Rightarrow \int T_\varkappa f d\nu_n &\to \int T_\varkappa f d\nu && \forall f \in C_b(S) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \int f d(T'_\varkappa \nu_n) \to \int f d(T'_\varkappa \nu) \qquad \forall f \in C_b(S)$$
$$\Leftrightarrow T'_\varkappa \nu_n \to {T_\varkappa}' \nu.$$

Die Norm ist ebenfalls stetig bzgl. der schwachen Konvergenz auf $\mathfrak{W}$, denn nach dem Portmanteau-Theorem A.3 gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|\nu_n\| = \lim_{n\to\infty} \nu_n(S) = \nu(S) = \|S\|.$$

Zusammen ergibt dies die Stetigkeit von $\tilde{T}_\varkappa$. Nach Korollar A.11 besitzt $\tilde{T}_\varkappa$ dann einen Fixpunkt $\nu_\varkappa \in \mathfrak{W}$. Das W-Maß $\nu_\varkappa$ ist damit zugleich ein Eigenmaß von $T_\varkappa$. Wir wählen nun $\varrho_\varkappa$ als den zugehörigen Eigenwert:

$$\varrho_\varkappa := \int (T'_\varkappa \nu_\varkappa)(dx) \mathbb{1}_S(x) = \int \nu_\varkappa(dx) \mathbf{E}\left[\|xM_1\|^\varkappa\right]. \tag{5.1.4}$$

2.Schritt : Beziehung zwischen $\varrho_\varkappa^n$ und $T_\varkappa^n$

Für alle $f \in C_b(S)$ ist $T_\varkappa^n f(x) = \mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^\varkappa f((x\Pi_n)^\sim)\right]$, dies sieht man per Induktion: Der Induktionsanfang ist gerade die Definition von $T_\varkappa$, und mit der Behauptung als Induktionsvoraussetzung folgt

$$\begin{aligned}
&T_\varkappa^{n+1} f(x)\\
&= T_\varkappa \mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^\varkappa f((x\Pi_n)^\sim)\right]\\
&= T_\varkappa \mathbf{E}\left[\|xM_2\cdots M_{n+1}\|^\varkappa f((xM_2\cdots M_{n+1})^\sim)\right]\\
&= \int \|y\|^\varkappa \mathbf{E}\left[\|(xM_1)^\sim M_2\cdots M_{n+1}\|^\varkappa f\left(((xM_1)^\sim M_2\cdots M_{n+1})^\sim\right) \;\middle|\; xM_1 = y\right] \mathbf{P}^{xM_1}(dy)\\
&= \mathbf{E}\|x\Pi_{n+1}\|^\varkappa f((x\Pi_{n+1})^\sim);
\end{aligned}$$

dabei wurde in der zweiten Zeile die identische Verteilung der $(M_n)_{n\geq 1}$ genutzt, und in der vierten Zeile deren Unabhängigkeit und die Plug-in-Rule. Mit der eben bewiesenen Identität erhalten wir analog zu oben die Gleichung

$$\varrho_\varkappa^n = \int ((T'_\varkappa)^n \nu_\varkappa)(dx)\mathbb{1}(x) = \int \nu_\varkappa(dx) T_\varkappa^n \mathbb{1}(x) = \int \nu_\varkappa(dx)\mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^\varkappa\right]. \tag{5.1.5}$$

Dies erklärt, warum wir $\varrho_\varkappa$ gerade als Eigenwert von $T'_\varkappa$ gewählt haben; denn mit dieser Identität lässt sich nicht nur $\|T\|$ mit $\varrho_\varkappa$ in Beziehung setzen, sondern sogar $\|T^n\|$ für alle $n \geq 1$, und wir werden sogar wie oben angedeutet, daraus

$$T_{\varkappa}^{n}\mathbb{1}_{S}(x) = O(\varrho_{\varkappa}^{n})$$

für alle $x \in S_+$ folgern können.

3.Schritt : Es gelten die Abschätzungen (5.1.1) und (5.1.2)
Wir behandeln jeweils die linke bzw. rechte Seite für beide Ungleichungen gemeinsam, da es offenbar genügt, die jeweils schärfere Ungleichung zu zeigen.

Nach Voraussetzung gibt es ein $n_0 \geq 1$ und Matrizen $m_1, \ldots, m_{n_0}$ in $\mathrm{supp}(\mathbf{P}^{M_1})$, so dass $\mathbf{m} = m_1 \cdots m_{n_0} \gg 0$. Dann lässt sich aufgrund der Stetigkeit der Matrizenmultiplikation und der bekannten Argumentation (mittels Umgebungen der m_i) ein $c > 0$ wählen, so dass

$$p := \mathbf{P}\left(\Pi_{n_0}(i,j) \geq c \text{ für alle } 1 \leq i,j \leq d\right) > 0.$$

Auf der Menge $\{\Pi_{n_0}(i,j) \geq c \,\forall\, 1 \leq i,j \leq d\}$ gilt für $n \geq n_0$ und alle $x \in S_+$,

$$\begin{aligned}
\|x\Pi_n\| &\overset{Ugl.(5)}{\geq} d^{-\frac{1}{2}} \sum_{i,j=1}^{d} x\Pi_{n_0}(i)\left(M_{n_0+1}\cdots M_n\right)(i,j) \\
&= d^{-\frac{1}{2}} \sum_{i,j=1}^{d} \left(\sum_{l=1}^{d} x_l \Pi_{n_0}(l,i)\right)\left(M_{n_0+1}\cdots M_n\right)(i,j) \\
&\geq d^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{l=1}^{d} x_l c\right) \sum_{i,j=1}^{d} \left(M_{n_0+1}\cdots M_n\right)(i,j) \\
&\overset{Ugl.(4),(2)}{\geq} d^{-\frac{1}{2}} c \left\|M_{n_0+1}\cdots M_n\right\|.
\end{aligned}$$

Bilden des Erwartungswertes liefert (unter Beachtung, dass $(M_n)_{n\geq 1}$ iid)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^{\varkappa}\right] &\geq \mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^{\varkappa} \cdot \mathbb{1}_{\left\{\Pi_{n_0}(i,j)\geq c \;\forall\, 1\leq i,j\leq d\right\}}\right] \\
&\geq \mathbf{E}\left[\left(d^{-\frac{1}{2}} c \left\|M_{n_0+1}\cdots M_n\right\|\right)^{\varkappa} \cdot \mathbb{1}_{\left\{\Pi_{n_0}(i,j)\geq c \;\forall\, 1\leq i,j\leq d\right\}}\right] \\
&= d^{-\frac{\varkappa}{2}} c^{\varkappa} \mathbf{E}\left[\|\Pi_{n-n_0}\|^{\varkappa}\right] \cdot p
\end{aligned} \tag{5.1.6}$$

für alle $x \in S_+$. Mit (5.1.5) erhalten wir daraus

$$\varrho_{\varkappa}^{n} \;\geq\; \min_{x \in S_+} \mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^{\varkappa}\right] \;\geq\; p d^{-\frac{\varkappa}{2}} c^{\varkappa} \mathbf{E}\left[\|\Pi_{n-n_0}\|^{\varkappa}\right]$$

für alle $n \geq n_0$ bzw.

$$\varrho_\varkappa^{n+n_0} \geq pd^{-\frac{\varkappa}{2}} c^\varkappa \mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^\varkappa\right] \tag{5.1.7}$$

für alle $n \geq n_0$. Definieren wir an dieser Stelle bereits die (offensichtlich stetige) Funktion $C : [0, \varkappa_0] \to (0, \infty)$ durch

$$C(\varkappa) := pd^{\frac{-\varkappa}{2}} c^\varkappa, \tag{5.1.8}$$

so haben wir die linke Seite

$$\varrho_\varkappa^{-n_0} C(\varkappa) \|T_\varkappa^n\| \;\leq\; \varrho_\varkappa^{-n_0} C(\varkappa) \mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^\varkappa\right] \;\leq\; \varrho_\varkappa^n$$

von (5.1.1) gezeigt. Daraus folgt direkt die linke Seite von (5.1.2).

Die Ungleichung (5.1.6) liest sich dann

$$C(\varkappa) \mathbf{E}\left[\|\Pi_{n-n_0}\|^\varkappa\right] \leq \mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^\varkappa\right]$$

für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in S_+$, woraus mit der oben bewiesenen Gleichung für $\varrho_\varkappa^n$ folgt

$$\begin{aligned}
\varrho_\varkappa^n &= \varrho_\varkappa^{n_0} \int \nu_\varkappa(dz) \mathbf{E}\left[\|z\Pi_{n-n_0}\|^\varkappa\right] \\
&\leq \varrho_\varkappa^{n_0} \mathbf{E}\left[\|\Pi_{n-n_0}\|^\varkappa\right] \\
&\leq \varrho_\varkappa^{n_0} C(\varkappa)^{-1} \mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^\varkappa\right]
\end{aligned}$$

für alle $x \in S_+$. Dies ist die rechte Seite von (5.1.2); sie impliziert die rechte Seite von (5.1.1).

4.Schritt : Werte für ϱ_0 und $\varrho_{\varkappa_0}$

Aus der Definition von $\varrho_\varkappa$ folgt direkt

$$\min_{x \in S_+} \mathbf{E}\left[\|xM_1\|^\varkappa\right] \leq \varrho_\varkappa \leq \mathbf{E}\left[\|M_1\|^\varkappa\right].$$

Offenbar ist dann $\varrho_0 = 1$, wir zeigen nun, dass $\varrho_{\varkappa_0} \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\|xM\| \;&=\; \sqrt{\sum_{j=1}^d \left(\sum_{i=1}^d x_i M_{ij}\right)^2} \;\overset{Ugl.5}{\geq}\; d^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d x_i M_{ij} \\
&\overset{umordnen}{\geq} d^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^d x_i \min_{1 \leq l \leq d} \sum_{j=1}^d M_{lj} \;\overset{Ugl.2}{\geq}\; d^{-\frac{1}{2}} \min_{1 \leq l \leq d} \sum_{j=1}^d M_{lj}.
\end{aligned}$$

Aus der Voraussetzung folgt nun

$$\varrho_{\varkappa_0} \geq \min_{x \in S_+} \mathbf{E}\left[\|xM_1\|^{\varkappa_0}\right] \geq \mathbf{E}\left[\left(d^{-\frac{1}{2}} \min_{1 \leq l \leq d} \sum_{j=1}^{d} M_{lj}\right)^{\varkappa_0}\right] \geq 1. \qquad \square$$

5.3 Lemma

Seien $\varrho_\varkappa$ wie in Lemma 5.2 gewählt; es gelten also die dort genannten Abschätzungen. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\right] = \log \varrho_\varkappa.$$

Definiert man – für festes $\varkappa \in [0, \varkappa_0]$ – eine Folge von Funktionen $r_\varkappa^{(n)} : S \to (0, \infty)$ durch

$$r_\varkappa^{(n)}(x) := (\varrho_\varkappa^{-n} T_\varkappa^n \mathbb{1}_S)(x) = \varrho_\varkappa^{-n} \mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^{\varkappa}\right]$$

für alle $n \geq 0$, so ist die Folge gleichgradig stetig, und es gibt Konstanten $0 < K_1 < K_2$, so dass

$$K_1 < r_n(x) < K_2$$

für alle $x \in S_+$ und alle $n \geq 0$.

Beweis.

Die Konvergenzbehauptung folgt direkt aus der Abschätzung (5.1.1):

$$\left\{\varrho_\varkappa^{-n_0} C(\varkappa)\right\}^{\frac{1}{n}} \left(\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\right]\right)^{\frac{1}{n}} \ \leq \ \varrho_\varkappa \ \leq \ \left\{\varrho_\varkappa^{n_0} C(\varkappa)^{-1}\right\}^{\frac{1}{n}} \left(\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\right]\right)^{\frac{1}{n}}$$

für alle $n \geq 1$, woraus insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\right] = \log \varrho_\varkappa$$

folgt (beachte $\varrho_\varkappa > 0$).

Für die gleichgradige Stetigkeit unterscheiden wir die Fälle $0 < \varkappa < 1$ und $\varkappa \geq 1$ (für $\varkappa = 0$ ist $r \equiv 1$; dieser Fall ist also nicht von Interesse). Für $0 < \varkappa < 1$ liefert uns Ungleichung (6) und die umgekehrte Dreiecksungleichung, dass

$$\pm\left(\|x\Pi_n\|^{\varkappa} - \|y\Pi_n\|^{\varkappa}\right) \ \leq \ \Big|\|x\Pi_n\| - \|y\Pi_n\|\Big|^{\varkappa} \ \leq \ \|(x-y)\Pi_n\|^{\varkappa} \ \leq \ \|x-y\|^{\varkappa} \cdot \|\Pi_n\|^{\varkappa}.$$

für alle $x, y \in S^{d-1}$ und Matrizen Π_n. Bilden des Erwartungswertes liefert dann insbesondere für alle $n \geq 0$ und $x, y \in S_+$, dass

$$\Big|\mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^{\varkappa}\right] - \mathbf{E}\left[\|y\Pi_n\|^{\varkappa}\right]\Big| \;\leq\; \|x-y\|^{\varkappa}\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\right].$$

Stellen wir die Abschätzung (5.1.1) für $\varrho_{\varkappa}$ zu $\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\right] \leq \varrho_{\varkappa}^{n+n_0} C(\varkappa)^{-1}$ um, so erhalten wir

$$\Big|\mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^{\varkappa}\right] - \mathbf{E}\left[\|y\Pi_n\|^{\varkappa}\right]\Big| \leq \|x-y\|^{\varkappa}\varrho_{\varkappa}^{n+n_0}C(\varkappa)^{-1}.$$

Division durch $\varrho_{\varkappa}^{n}$ liefert schließlich

$$|r_n^{\varkappa}(x) - r_n^{\varkappa}(y)| \;=\; \Big|\varrho_{\varkappa}^{-n}\mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^{\varkappa}\right] - \varrho_{\varkappa}^{-n}\mathbf{E}\left[\|y\Pi_n\|^{\varkappa}\right]\Big| \;\leq\; \|x-y\|^{\varkappa}\varrho_{\varkappa}^{n_0}p^{-1}d^{\frac{\varkappa}{2}}c^{-\varkappa}.$$

Der Faktor auf der rechten Seite ist unabhängig von x, y und n; also ist die Folge $r_n^{\varkappa}$ gleichgradig stetig im Fall $0 < \varkappa < 1$.

Nun zum Fall $\varkappa \geq 1$: Hier folgt aus Ungleichung (7)

$$\begin{aligned}\pm\left(\|x\Pi_n\|^{\varkappa} - \|y\Pi_n\|^{\varkappa}\right) &\leq \Big|\|x\Pi_n\| - \|y\Pi_n\|\Big| \cdot \varkappa \cdot \max\{\|x\Pi_n\|^{\varkappa-1}, \|y\Pi_n\|^{\varkappa-1}\} \\ &\leq \|x-y\| \cdot \|\Pi_n\| \cdot \varkappa \cdot \|\Pi_n\|^{\varkappa-1} = \varkappa\,\|x-y\| \cdot \|\Pi_n\|^{\varkappa}.\end{aligned}$$

Bilden wir den Erwartungswert, so erhalten wir für alle $x, y \in S_+$ und alle $n \geq 0$

$$\Big|\mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^{\varkappa}\right] - \mathbf{E}\left[\|y\Pi_n\|^{\varkappa}\right]\Big| \leq \varkappa\,\|x-y\|\,\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\right] \overset{(s.o.)}{\leq} \varkappa\,\|x-y\|\,\varrho_{\varkappa}^{n+n_0}C(\varkappa)^{-1},$$

und damit nach Division durch $\varrho_{\varkappa}^{n}$ die gleichgradige Stetigkeit von $(r_n^{\varkappa})_{n\geq 0}$.

Durch Umstellen von Abschätzung (5.1.2) erhalten wir schließlich die Schranken für $(r_n^{\varkappa})_{n\geq 0} = (\varrho_{\varkappa}^{-n}\mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^{\varkappa}\right])_{n\geq 0}$:

$$K_1 := \varrho_{\varkappa}^{-n_0}C(\varkappa) \;\leq\; \varrho_{\varkappa}^{-n}\mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^{\varkappa}\right] \;\leq\; \varrho_{\varkappa}^{n_0}C(\varkappa)^{-1} =: K_2$$

für alle $n \geq 0$, $x \in S$. Insbesondere sind beide Schranken positiv. □

5.4 Lemma

Seien $(r_{\varkappa}^{(n)})_{n\geq 0}$, $\varrho_{\varkappa}$ wie oben definiert. Dann besitzt die Folge von Funktionen

$$\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} r_{\varkappa}^{(n)}$$

eine in $C_b(S)$ konvergente Teilfolge. Deren Grenzwert $r_{\varkappa}$ ist eine stetige Abbildung von

S nach $(0,\infty)$*, und es gilt*

$$T_\varkappa r_\varkappa = \varrho_\varkappa r_\varkappa.$$

Beweis. Nach Lemma 5.3 ist die Folge $(r_\varkappa^{(n)})_{n\geq 0}$ gleichmäßig beschränkt. Dies setzt sich offensichtlich mit denselben unteren und oberen Schranken K_1 bzw. K_2 auf die Folge $\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^n r_\varkappa^{(n)}$ fort. Ebenso überträgt sich die gleichgradige Stetigkeit durch einfaches Anwenden der Dreiecksungleichung. S_+ ist kompakt, also lässt sich der Satz von Arzelà-Ascoli, A.13, auf $M = \{\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^n r_\varkappa^{(n)} \ : \ n \geq 0\} \subset C_b(S)$ anwenden.

Somit ist M relativ folgenkompakt, was uns die konvergente Teilfolge liefert. Ihr Grenzwert $r_\varkappa$ ist stetig, und wegen $K_1 > 0$ folgt insbesondere, dass $r_\varkappa(x) > 0$ für alle $x \in S_+$. Schließlich folgt aus der Linearität und Stetigkeit von $T_\varkappa$, dass

$$\begin{aligned}
T_\varkappa r_\varkappa =& T_\varkappa \left(\lim_{l\to\infty} \frac{1}{n_l+1} \sum_{j=0}^{n_l} \varrho_\varkappa^{-j} T_\varkappa^j \mathbb{1}_S \right) && = \lim_{l\to\infty} T_\varkappa \left(\frac{1}{n_l+1} \sum_{j=0}^{n_l} \varrho_\varkappa^{-j} T_\varkappa^j \mathbb{1}_S \right) \\
=& \lim_{l\to\infty} \frac{1}{n_l+1} \sum_{j=0}^{n_l} \varrho_\varkappa^{-j}\, T_\varkappa^{j+1}\, \mathbb{1}_S && = \varrho_\varkappa \left(\lim_{l\to\infty} \frac{1}{n_l+1} \sum_{j=0}^{n_l} \varrho_\varkappa^{-(j+1)} T_\varkappa^{j+1} \mathbb{1}_S \right) \\
=& \varrho_\varkappa \left(r_\varkappa - \lim_{l\to\infty} \tfrac{1}{n_l+1} \mathbb{1}_S \right) && = \varrho_\varkappa r_\varkappa.
\end{aligned}$$

□

5.2. Wahl von $\varkappa_1$

5.5 Lemma

Es seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

1. $\log \varrho_\varkappa = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^\varkappa\right]$.

2. *Es gibt eine stetige Funktion* $C : [0, \varkappa_0] \to (0,\infty)$ *und ein* $n_0 \in \mathbb{N}$*, so dass*

$$\varrho_\varkappa \geq \left(C(\varkappa) \varrho_\varkappa^{-n_0} \cdot \mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^\varkappa\right] \right)^{\frac{1}{n}}$$

   für alle $n \geq 1$.

3. $\mathbf{E}\left[\|M_1\|^{\varkappa_0}\right] < \infty$ *und* $\varrho_{\varkappa_0} \geq 1$.

4. *Für ein* $\beta \in (-\infty, 0)$ *gelte*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|M_1 \cdots M_n\| = \beta \quad \mathbf{P}\text{-}f.s..$$

Dann gibt es genau ein $\varkappa_1 \in (0, \varkappa_0]$ *mit* $\varrho_\varkappa = 1$.

5.6 Bemerkung
Aus der zweiten Bedingung werden wir im Beweis folgern, dass es eine allgemeine Konstante $C > 0$ gibt, so dass

$$\varrho_\varkappa \geq (C \cdot \mathbf{E}[\|\Pi_n\|^\varkappa])^{\frac{1}{n}} \tag{5.2.1}$$

für alle $\varkappa \in [0, \varkappa_0]$ und alle $n \geq 1$. Dies ist die eigentlich benötigte Voraussetzung, Lemma 5.5 bleibt gültig – wie wir im Beweis sehen werden –, wenn wir (5.2.1) anstelle der zweiten Bedingung fordern.

Beweis. Um dies zu beweisen, zeigen wir, dass $\varrho_\varkappa$ auf $(0, \varkappa_0]$ eine stetige, strikt konvexe Funktion von $\varkappa$ ist, und dass $\varrho_\delta < 1$ für ein $\delta \in (0, \varkappa_0]$. Die Behauptung folgt dann aus dem Zwischenwertsatz.

Dazu zeigen wir zunächst die Konvexität von

$$g_n(\varkappa) := \frac{1}{n} \log \mathbf{E}[\|\Pi_n\|^\varkappa]$$

für alle $n \geq 1$. Zwar sieht man sofort, dass $\mathbf{E}[\|\Pi_n\|^\varkappa] = \mathbf{E}\left[e^{\varkappa \log\|\Pi_n\|}\right]$ als Laplace-Transformierte von $\mathbf{P}^{\log\|\Pi_n\|}$ für jedes $n \geq 1$ konvex ist, allerdings wird noch der konkave Logarithmus darauf angewandt. Da die Verknüpfung einer konkaven und einer konvexen Funktion im Allgemeinen alles sein kann, müssen wir etwas weiter ausholen, um die Konvexität zu zeigen.

1.Schritt : g_n ist differenzierbar auf $(0, \varkappa_0)$ für genügend grosses n
Um die Ableitung

$$\frac{d}{d\varkappa}\left(\frac{1}{n} \log \mathbf{E}[\|\Pi_n\|^\varkappa]\right) = \frac{1}{n} \frac{\frac{d}{d\varkappa}\mathbf{E}[\|\Pi_n\|^\varkappa]}{\mathbf{E}[\|\Pi_n\|^\varkappa]}$$

bilden zu können, müssen wir zeigen, dass die Familie $\left(\|\Pi_n\|^\varkappa \log\|\Pi_n\|\right)_{\varkappa \in (0,\varkappa_0]}$ gleichgradig integrierbar ist. Dann dürfen wir Differentiation und Integration vertauschen, und haben

$$\frac{d}{d\varkappa}\mathbf{E}[\|\Pi_n\|^\varkappa] = \mathbf{E}\left[\frac{d}{d\varkappa}\|\Pi_n\|^\varkappa\right] = \mathbf{E}[\|\Pi_n\|^\varkappa \log\|\Pi_n\|].$$

Dazu beachte, dass

$$\left|\|\Pi_n\|^\varkappa \log\|\Pi_n\|\right| \leq \log^-\|\Pi_n\| + \|\Pi_n\|^{\varkappa_0} \log^+\|\Pi_n\|$$

für alle $0 < \varkappa \leq \varkappa_0$. Die Integrierbarkeit der rechten Seite ist ein hinreichendes Kriterium für die gleichgradige Integrierbarkeit der Familie.

Unter $\mathbf{P}$ sind die $(M_n)_{n\geq 0}$ unabhängig identisch verteilt. Deshalb können wir den Satz von Furstenberg-Kesten anwenden, um die L_1-Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathbf{E}\left[\log \|\Pi_n\|\right] = \beta$$

zu erhalten. Aufgrund der Konvergenz gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\log \|\Pi_n\|$ integrierbar ist für alle $n \geq N$, und damit insbesondere auch $\log^- \|\Pi_n\|$.

Zum anderen haben wir für alle $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa_0} \log^+ \|\Pi_n\|\right] \\
\leq &\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^{n} \|M_i\|^{\varkappa_0} \log^+ \|M_j\|\right] \\
= &\, n \left(\mathbf{E}\left[\|M_1\|^{\varkappa_0}\right]\right)^{n-1} \mathbf{E}\left[\|M_1\|^{\varkappa_0} \log^+ \|M_1\|\right] < \infty.
\end{aligned}$$

2.Schritt : Die erste Ableitung g_n' ist streng monoton wachsend für $n \geq N$

Es genügt zu zeigen, dass für jedes $\varkappa \in (0, \varkappa_0)$

$$\liminf_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(g_n'(\varkappa + h) - g_n'(\varkappa)\right) > 0.$$

Erinnern wir uns an den Beweis der Quotientenregel, so erhalten wir unter Beachtung der Differenzierbarkeit von $\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\right]$

$$\begin{aligned}
&\liminf_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa+h} \log \|\Pi_n\|\right]}{\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa+h}\right]} - \frac{\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa} \log \|\Pi_n\|\right]}{\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\right]} \right) \\
= &\liminf_{h\to 0} \frac{1}{\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\right]} \left(\frac{\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa+h} \log \|\Pi_n\|\right] - \mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa} \log \|\Pi_n\|\right]}{h} \right) \\
&- \left(\frac{\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa} \log \|\Pi_n\|\right]}{\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\right]} \right)^2 \\
= &\frac{1}{\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\right]} \liminf_{h\to 0} \mathbf{E}\left[\frac{\|\Pi_n\|^{\varkappa+h} \log \|\Pi_n\| - \|\Pi_n\|^{\varkappa} \log \|\Pi_n\|}{h} \right] - \left(\frac{\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa} \log \|\Pi_n\|\right]}{\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\right]} \right)^2.
\end{aligned}$$

Die Funktion $h^{-1}(\|\Pi_n\|^{\varkappa+h} \log \|\Pi_n\| - \|\Pi_n\|^{\varkappa} \log \|\Pi_n\|)$ ist nichtnegativ: Betrachte die Mengen $\{\|\Pi_n\| > 1\}$ und $\{\|\Pi_n\| \leq 1\}$, auf der zweiten Menge vertauscht der Logarithmus die Vorzeichen. Wir können also das Lemma von Fatou anwenden (auf beliebige

Nullfolgen $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$), und erhalten

$$\liminf_{h\to 0} \mathbf{E}\left[\frac{\|\Pi_n\|^{\varkappa+h}\log\|\Pi_n\| - \|\Pi_n\|^{\varkappa}\log\|\Pi_n\|}{h}\right] \geq \mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\log^2\|\Pi_n\|\right].$$

Die rechte Seite kann unendlich sein, dann sind wir aber fertig. Ansonsten haben wir gezeigt, dass

$$\begin{aligned}\liminf_{h\to 0} \frac{1}{h}&\left(\frac{\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa+h}\log\|\Pi_n\|\right]}{\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa+h}\right]} - \frac{\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\log\|\Pi_n\|\right]}{\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\right]}\right)\\ &\geq \frac{\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\right]\cdot\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\log^2\|\Pi_n\|\right] - \left(\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\log\|\Pi_n\|\right]\right)^2}{\left(\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\right]\right)^2}.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist nichtnegativ aufgrund der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, angewendet auf die (unter der Annahme $\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\log^2\|\Pi_n\|\right] < \infty$) quadratintegrablen Zufallsgrößen $\|\Pi_n\|^{\frac{\varkappa}{2}}$ und $\|\Pi_n\|^{\frac{\varkappa}{2}}\log\|\Pi_n\|$. Tatsächlich ist der Ausdruck sogar strikt positiv, da die beiden Funktionen linear unabhängig sind.

3.Schritt : $\varrho_\varkappa$ ist strikt konvex $[0,\varkappa_0]$ und stetig auf $(0,\varkappa_0)$

Auf dem offenen Intervall $(0,\varkappa_0)$ ist streng monotones Wachstum der ersten Ableitung äquivalent zur strikten Konvexität von $g_n(\varkappa)$. Weiterhin ist g_n nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz auf $[0,\varkappa_0]$ insbesondere stetig. Damit ist g_n aber schon auf dem abgeschlossenen Intervall strikt konvex. Dies gilt für alle $n \geq N$; und da die Konvexitätsbedingung verträglich ist mit dem punktweisen Limes, ist auch $\log\varrho_\varkappa = \lim_{n\to\infty} g_n(\varkappa)$ strikt konvex auf $[0,\varkappa_0]$. Verknüpfungen konvexer Funktionen sind konvex, also ist schließlich $\varrho_\varkappa = e^{\log\varrho_\varkappa}$ strikt konvex.

Daraus folgt bereits, dass $\varrho_\varkappa$ auf $(0,\varkappa_0)$ stetig ist. Erinnern wir uns, dass $\varrho_{\varkappa_0} \geq \varrho_0 = 1$ war, so folgt aus der Konvexität, dass $\varrho_{\varkappa_0} \geq \lim_{\varkappa\uparrow\varkappa_0}\varrho_\varkappa$ sein muss.

4.Schritt : $\varrho_\varkappa$ ist stetig in $\varkappa_0$

Somit muss das Maximum von $\varrho_\varkappa$ bei $\varkappa_0$ vorliegen. Da die Funktion $C(\varkappa)$ aus der Voraussetzung auf dem kompakten Intervall $[0,\varkappa_0]$ stetig ist, gilt folglich für

$$C := \varrho_{\varkappa_0}^{-n_0}\cdot\min_{\varkappa} C(\varkappa),$$

dass $\varrho_\varkappa \geq \left(C\cdot\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\right]\right)^{\frac{1}{n}}$ für alle $\varkappa \in [0,\varkappa_0]$. Dies ist gerade die in der Bemerkung erwähnte Bedingung. Wähle nun $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$(1-\varepsilon)\varrho_{\varkappa_0} \leq \left(\mathbf{E}\left[\|\Pi_N\|^{\varkappa_0}\right]\right)^{\frac{1}{N}}$$

(möglich aufgrund der Konvergenz) und

$$C^{\frac{1}{N}} \geq (1-\varepsilon).$$

Aufgrund der Stetigkeit von $\left(\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\right]\right)^{\frac{1}{N}}$ in $\varkappa$ gibt es dann aber ein $\eta > 0$, so dass für alle $\varkappa \in (\varkappa_0 - \eta, \varkappa_0)$

$$\varrho_{\varkappa} \geq \left\{C \cdot \mathbf{E}\left[\|\Pi_N\|^{\varkappa}\right]\right\}^{\frac{1}{N}} \geq (1-\varepsilon)\left\{C \cdot \mathbf{E}\left[\|\Pi_N\|^{\varkappa_0}\right]\right\}^{\frac{1}{N}} > (1-\varepsilon)^3 \varrho_{\varkappa_0}.$$

Also muss $\lim_{\varkappa \uparrow \varkappa_0} \varrho_{\varkappa} = \varrho_{\varkappa_0}$ gelten.

5.Schritt : $\varrho_\delta < 1$ für ein $\delta \in (0, \varkappa_0]$.
Hier benötigen wir schließlich die Negativität des Ljapunov-Exponenten: Nach dem Satz von Furstenberg-Kesten ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathbf{E}\left[\log \|\Pi_n\|\right] = \beta < 0,$$

also gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\mathbf{E}\left[\log \|\Pi_N\|\right] < 0$. Nun ist

$$\lim_{\varkappa \downarrow 0} \frac{\mathbf{E}\left[\|\Pi_N\|^{\varkappa}\right] - 1}{\varkappa} = \frac{d}{d\varkappa} \mathbf{E}\left[\|\Pi_N\|^{\varkappa}\right]\Big|_{\varkappa=0} = \mathbf{E}\left[\log \|\Pi_N\|\right] < 0.$$

Also gibt es ein $\delta > 0$ mit $\mathbf{E}\left[\|\Pi_N\|^{\delta}\right] < 1$. Daraus folgt schließlich

$$\log \varrho_\delta = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{lN} \log \mathbf{E}\left[\|\Pi_{lN}\|^{\delta}\right] \leq \frac{1}{N} \log \mathbf{E}\left[\|\Pi_N\|^{\delta}\right] < 0,$$

also $\varrho_\delta < 1$. Wie eingangs erläutert, liefert uns die Stetigkeit von $\varrho_\varkappa$ auf $(0, \varkappa_0]$ nun die Existenz eines $\varkappa_1 \in (0, \varkappa_0]$ mit $\varrho_{\varkappa_1} = 1$; und die strikte Konvexität dessen Eindeutigkeit.

$\square$

5.3. Erneuerungstheorie für Produkte positiver Zufallsmatrizen II

5.7 Lemma

Es sei $(M_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von unabhängig identisch verteilten Zufallsmatrizen mit negativem Ljapunov-Exponenten β, und es sei $(r, \varkappa_1)$ ein maßdefinierendes Paar mit $\varkappa_1 > 0$. Es gelte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} = \alpha \quad \mathbb{P}\text{-}f.s..$$

Dann gilt $\alpha > 0$.

Beweis. Wir zeigen, dass für ein $\gamma > 0$ und $C > 0$ gilt

$$\mathbb{P}_x\left(V_n \leq \gamma\varkappa_1^{-1} n\right) \leq Ce^{-\gamma(\varkappa_1+1)n} \tag{5.3.1}$$

für alle $x \in S_+$. Aus der Konvergenz der geometrischen Reihe erhalten wir dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x\left(V_n \leq \gamma\varkappa_1^{-1} n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} C(e^{-\gamma(\varkappa_1+1)})^n < \infty,$$

und mit dem Lemma von Borel-Cantelli

$$\mathbb{P}_x\left(V_n \leq \gamma\varkappa_1^{-1} n \text{ unendlich oft}\right) = 0.$$

Dies ist aber ($(\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c$) äquivalent zu

$$V_n > \gamma\varkappa_1^{-1} n \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}_x\text{-}f.s.$$

für alle $x \in S_+$, woraus insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} \geq \gamma\varkappa_1^{-1} > 0 \quad \mathbb{P}_x\text{-}f.s.$$

für alle $x \in S_+$ folgt, das ist die Behauptung.

Nachweis von (5.3.1): Hier benötigen wir die Negativität des Ljapunov-Exponenten: Wie bereits im Beweis von Lemma 5.5 gezeigt, gibt es ein $\delta > 0$ mit $\mathbf{E}\left[\|\Pi_N\|^{\delta}\right] < 1$. Es kann dann ein $\gamma > 0$ so gewählt werden, dass

$$\mathbf{E}\left[\|\Pi_N\|^{\delta}\right] < e^{-\gamma(2+\delta)N}.$$

Sei $n \geq 0$ beliebig, dann gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ und $0 \leq q < N$ mit $n = sN + q$. Beachten wir, dass $(M_n)_{n\geq 0}$ unter $\mathbf{P}$ eine unabhängig identisch verteilte Folge von Zufallsvariablen bildet, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^\delta\right] \leq \left(\mathbf{E}\left[\|\Pi_N\|^\delta\right]\right)^s \mathbf{E}\left[\|\Pi_q\|^\delta\right] &\leq e^{-\gamma(2+\delta)sN} \cdot \left(1 + \mathbf{E}\left[\|M_1\|^\delta\right]\right)^N \\ &= e^{-\gamma(2+\delta)(sN+q)} \cdot e^{+\gamma(2+\delta)q}\left(1 + \mathbf{E}\left[\|M_1\|^\delta\right]\right)^N \leq K e^{-\gamma(2+\delta)n}\end{aligned}$$

für geeignetes $K > 0$. Mit der Markov-Ungleichung folgt direkt

$$\mathbf{P}\left(\|x\Pi_n\| \geq e^{-\gamma n}\right) \leq \mathbf{P}\left(\|\Pi_n\|^\delta \geq e^{-\gamma\delta n}\right) \leq \frac{\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^\delta\right]}{e^{-\gamma\delta n}} \leq K e^{-2\gamma n}$$

für alle $x \in S_+$. Schließlich (unter Ausnutzung von 3.1.4)

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_x\left(V_n \leq \gamma \varkappa_1^{-1} n\right) = \mathbb{P}_x\left(e^{V_n} \leq e^{\gamma\varkappa_1^{-1}n}\right) \\ &= \frac{1}{r(x)}\mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^{\varkappa_1} r((x\Pi_n)^\sim) \cdot \mathbb{1}_{[0,e^{\gamma\varkappa_1^{-1}n}]}(\|x\Pi_n\|)\right] \\ &\leq \left(\max_{z_1,z_2\in S_+}\frac{r(z_1)}{r(z_2)}\right)\Big(\mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^{\varkappa_1} \cdot \mathbb{1}_{[0,e^{-\gamma n})}(\|x\Pi_n\|)\right] \\ &\quad + \mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^{\varkappa_1} \cdot \mathbb{1}_{[e^{-\gamma n},e^{\gamma\varkappa_1^{-1}n}]}(\|x\Pi_n\|)\right]\Big) \\ &\leq \left(\max_{z_1,z_2\in S_+}\frac{r(z_1)}{r(z_2)}\right)\left(e^{-\gamma\varkappa_1 n} + \mathbf{E}\left[e^{\gamma n} \cdot \mathbb{1}_{[e^{-\gamma n},e^{\gamma\varkappa_1^{-1}n}]}(\|x\Pi_n\|)\right]\right) \\ &\leq \left(\max_{z_1,z_2\in S_+}\frac{r(z_1)}{r(z_2)}\right)\left(e^{-\gamma\varkappa_1 n} + e^{\gamma n}\mathbf{P}\left(\|x\Pi_n\| \geq e^{-\gamma n}\right)\right) \\ &\leq \left(\max_{z_1,z_2\in S_+}\frac{r(z_1)}{r(z_2)}\right)\left(e^{-\gamma\varkappa_1 n} + e^{\gamma n}Ke^{-2\gamma n}\right) \leq C \cdot e^{-\gamma(\varkappa_1+1)n}\end{aligned}$$

für geeignetes $C > 0$ und alle $x \in S_+$. □

Nun haben wir alles zusammen, um das Markov-Erneuerungstheorem anwenden zu können, und unser Hauptresultat zu beweisen. Dabei kommt uns zu Gute, dass wir bereits in Kapitel 3 die Anwendbarkeit des Markov-Erneuerungstheorems auf Folgen positiver Zufallsmatrizen auch für transformierte Maße nachgewiesen haben, und wir nur die Voraussetzungen von Lemma 3.18 überprüfen müssen.

5.8 Satz

Es sei $(M_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von unter $\mathbf{P}$ unabhängig identisch verteilten Zufallsmatrizen.

Es gelte

$$\mathbf{P}\left(M_1 \geq 0\right) = 1$$
$$\mathbf{P}\left(M_1 \text{ hat eine Nullzeile}\right) = 0$$

sowie für ein $\varkappa_0 > 0$

$$\mathbf{E}\left[\|M_1\|^{\varkappa_0} \log^+ \|M_1\|\right] < \infty$$
$$\mathbf{E}\Big[\big(\min_{1\leq i\leq d} \sum_{j=1}^{d} M_1(i,j)\big)^{\varkappa_0}\Big] \geq d^{\frac{1}{2}}.$$

Die von

$$G := \left\{\log \lambda_1(\boldsymbol{m}) \;:\; \boldsymbol{m} \gg 0, \boldsymbol{m} = m_1 \cdots m_n \text{ für ein } k \geq 1 \text{ und } m_i \in \operatorname{supp}(\mathbf{P}^{M_1})\right\}$$

erzeugte Gruppe sei dicht in $\mathbb{R}$*, und es gebe ein* $\beta \in (-\infty, 0)$ *mit*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \|M_1 \cdots M_n\| = \beta \quad \mathbf{P}\text{-}f.s.$$

Dann besitzt die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\right] = 0$$

auf dem Intervall $(0, \varkappa_0]$ *eine eindeutige Lösung* $\varkappa_1$*.*

Es existiert eine stetige Funktion $r : S_+ \to (0,\infty)$*, so dass für jede stetige und beschränkte Funktion* $g : S_+ \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *und jedes* $x \in S_+$

$$\lim_{t\to\infty} e^{\varkappa_1 t} \cdot \mathbf{E}\left[g\Big(Z_x(t), R_x(t)\Big)\, \mathbb{1}_{\{\tau_x(t)<\infty\}}\right] = K(g)r(x)$$

für eine von x *unabhängige Konstante* $K(g)$*. Für positive Funktionen* g *ist* $K(g)$ *ebenfalls strikt positiv.*

Insbesondere gibt es ein $K > 0$*, so dass für alle* $x \in S_+$

$$\lim_{t\to\infty} t^{\varkappa_1} \mathbf{P}\left(\sup_{n\geq 1} \|xM_1 \cdots M_n\| > t\right) = K \cdot r(x).$$

Die $\mathbf{P}$-*f.s.*-Konvergenz von $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \|M_1 \cdots M_n\|$ ist natürlich eine Konsequenz des Satzes von Furstenberg-Kesten, und keine Voraussetzung im obigen Satz. Die eigentliche Forderung ist, dass der Ljapunov-Exponent negativ ist.

Beweis. Aus Satz 5.1 zusammen mit Lemma 5.5 folgt die Existenz eines eindeutigen $\varkappa_1 \in (0, \varkappa_0]$ mit $\varrho_{\varkappa_1} = 1$. Da dort gezeigt wurde, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{E} \left[\|\Pi_n\|^{\varkappa} \right] = \log \varrho_{\varkappa},$$

ist dieses $\varkappa_1$ die einzige Lösung der obigen Gleichung auf dem Intervall $(0, \varkappa_0]$. Die zugehörige Funktion $r_{\varkappa_1}$ ist Eigenfunktion von $T_{\varkappa_1}$ zum Eigenwert 1. Das Paar $(r_{\varkappa_1}, \varkappa_1)$ ist also maßdefinierend. Bezeichne nun $r := r_{\varkappa_1}$.

1.Schritt : Anwendbarkeit des Markov-Erneuerungstheorems
Mit Lemma 3.18 erhalten wir die Anwendbarkeit des Markov-Erneuerungstheorems (bis auf den Nachweis, dass $\alpha > 0$).

Auf $[1, \infty)$ ist die Funktionenfolge $t \mapsto t^{\varkappa}$ monoton wachsend in $\varkappa$, es gilt also für alle $\varkappa \in (0, \varkappa_0]$, dass

$$\mathbf{E} \left[\|M_1\|^{\varkappa} \log^+ \|M_1\| \right] \le \mathbf{E} \left[\|M_1\|^{\varkappa_0} \log^+ \|M_1\| \right].$$

Die einzige Voraussetzung von Lemma 3.18, die wir also noch nachprüfen müssen, ist die $\mathbb{P}_x$-*f.s.*-Endlichkeit der Stoppzeit

$$T_{\gg} = \inf\{n \ge 1 \ : \ \Pi_n \gg 0\}$$

für alle $x \in S_+$.

In 4.1 konnten wir dies schnell mit dem Lemma von Borel-Cantelli zeigen, da die $(M_n)_{n\ge1}$ eine unabhängig identisch verteilte Folge bildeten. Im hier vorliegenden Fall sind die M_n unter $\mathbb{P}_x$ jedoch nicht mehr unabhängig identisch verteilt, weshalb wir etwas weiter ausholen müssen.

Nach der Voraussetzung gibt es wieder ein $k \in \mathbb{N}$ und $m_1, \dots m_k \in \operatorname{supp}(\mathbf{P}^{M_1})$, so dass $\mathbf{m} = m_1 \cdots m_k \gg 0$. Sei also $\mathbf{m} = m_1 \cdots m_k$ eine zulässige Matrix mit normiertem rechtem Eigenvektor $\tilde{b}$ zum Eigenwert λ_1. Nach Korollar 3.12 gibt es ein $N \ge 1$ mit $\left\|x\mathbf{m}^N\right\| \ge c_1 \lambda_1^N$ für alle $x \in S_+$ und ein $c_1 > 0$. Aus der Stetigkeit der Matrizenmultiplikation folgt wieder die Existenz eines $\eta > 0$, so dass für alle $\mathbf{m}' = m_1' \cdots m_N'$ mit $(m_1', \dots, m_N') \in (B_\eta(m_1, \dots m_k))^N$ gilt, dass $\mathbf{m}' \gg 0$, und

$$\left\|x\mathbf{m}'\right\| \ge c\lambda_1^N$$

für alle $x \in S_+$ und geeignetes $c > 0$. Damit können wir folgern, dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x\left(\Pi_{Nk} \gg 0\right) &\geq \mathbb{P}_x\left(M_{sk+i} \in B_\eta(m_i)\ \forall\, 0 \leq s < N,\ 1 \leq i \leq k\right) \\
&= \frac{1}{r(x)} \mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{(B_\eta(m_1,\dots m_k))^N}(M_1, \dots M_{Nk}) \|x\Pi_{Nk}\|^{\varkappa} r((x\Pi_{Nk})^{\sim})\right] \\
&\geq \min_{z_1,z_2 \in S_+} \frac{r(z_1)}{r(z_2)} \mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{(B_\eta(m_1,\dots m_k))^N}(M_1, \dots M_{Nk})(c\lambda_1^N)^{\varkappa}\right] \\
&=: \delta > 0
\end{aligned}$$

für alle $x \in S_+$.

Da $(\Pi_n)_{n \geq 1}$ nach Voraussetzung $\mathbb{P}$-*f.s.* keine Nullzeile besitzt, gilt außerdem

$$\mathbb{P}_x\left(\Pi_{nNk} \gg 0 \mid \mathcal{F}_{(n-1)Nk}\right) = \mathbb{P}_x\left(M_{(n-1)Nk+1} \cdots M_{nNk} \gg 0 \mid \mathcal{F}_{(n-1)Nk}\right) \quad \mathbb{P}_x\text{-}f.s.$$

für alle $x \in S_+$. Es sei an Bemerkung 3.6 erinnert, dass (X_n, M_n) unter jedem $\mathbb{P}_x$ eine Markov-Kette bildet. Mit der Markov-Eigenschaft folgt dann, dass für jedes $l \geq 1$ gilt

$$\mathbb{P}_x\left(T_{\gg} > l\right) < (1-\delta)^l;$$

also ist $T_{\gg}$ $\mathbb{P}_x$-*f.s.* endlich für alle $x \in S_+$.

Mit Lemma 5.7 folgt schließlich, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} = \alpha > 0$ $\mathbb{P}$-*f.s.* Also können wir das Markov-Erneuerungstheorem anwenden, und erhalten die behaupteten Konvergenzaussagen:

2.Schritt : Konvergenzaussagen

Zu einer stetigen, beschränkten Funktion $g : S \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiere $\hat{g} : S \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$\hat{g}(y,s) := \frac{1}{r(y)} e^{-\varkappa_1 s} g(y,s).$$

Nach dem 2.Teil des Markov-Erneuerungstheorems (Satz 1.14) gilt dann

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x\left[\hat{g}(Z(t), R(t)) \mathbb{1}_{\{\tau(t)<\infty\}}\right] \\
&= \alpha^{-1} \int_S \int_{S\times(0,\infty)} \int_{[0,z)} \hat{g}(v,w)\ \lambda(dw)\ P^{>}(y, dv \times dz) \pi^{>}(dy) =: K(g),
\end{aligned}$$

wobei $K(g) > 0$ im Fall $g > 0$.

Erinnern wir uns daran, dass im vorliegenden Modell mit den transformierten Maßen die

Beziehung

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left[f(X_0,V_0,X_1,V_1,\dots,X_n,V_n)\right]\\
=&\frac{1}{r(x)}\mathbf{E}\left[f(x,0,(xM_1)^{\sim},\log\|xM_1\|,\dots,(x\Pi_n)^{\sim},\log\|x\Pi_n\|)e^{\varkappa\log\|x\Pi_n\|}r((x\Pi_n)^{\sim})\right].
\end{aligned}$$

gilt; und an die Definitionen von $Z_x(t), R_x(t), \tau_x(t)$ (vor Satz 4.3) bzw. $Z(t), R(t), \tau(t)$ (1.5); so erhalten wir zugleich

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left[\hat{g}(Z(t),R(t))\mathbb{1}_{\{\tau(t)<\infty\}}\right]\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}_x\left[\hat{g}(X_n,V_n-t)\mathbb{1}_{\{\tau(t)=n\}}\right]\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}_x\left[\tfrac{1}{r(X_n)}e^{-\varkappa_1 V_n+\varkappa_1 t}g(X_n,V_n-t)\mathbb{1}_{\{\tau(t)=n\}}\right]\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r(x)}\mathbf{E}\left[\tfrac{1}{r((x\Pi_n)^{\sim})}e^{-\varkappa_1\log\|x\Pi_n\|}e^{\varkappa_1 t}\,g\Big((x\Pi_n)^{\sim},\log\|x\Pi_n\|-t\Big)\,r((x\Pi_n)^{\sim})\,\|x\Pi_n\|^{\varkappa_1}\,\mathbb{1}_{\{\tau_x(t)=n\}}\right]\\
=&\frac{e^{\varkappa_1 t}}{r(x)}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[g\Big((x\Pi_n)^{\sim},\log\|x\Pi_n\|-t\Big)\,\mathbb{1}_{\{\tau_x(t)=n\}}\right]\\
=&\frac{e^{\varkappa_1 t}}{r(x)}\;\mathbf{E}\left[g\Big(Z_x(t),R_x(t)\Big)\,\mathbb{1}_{\{\tau_x(t)<\infty\}}\right].
\end{aligned}$$

Beachte, dass $\{\tau_x(\log t)<\infty\}=\{\sup_{n\geq 1}\|xM_1\cdots M_n\|>t\}$. Für $g\equiv 1$ und mit t ersetzt durch $\log t$ erhalten wir damit insbesondere (wie schon im Überblick gezeigt)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^{\varkappa_1}}{r(x)}\mathbf{P}\left(\sup_{n\geq 1}\|xM_1\cdots M_n\|>t\right)=K(\mathbb{1})=:K>0. \qquad \square$$

6. Grundlagen für reguläre Matrizen

In diesem und dem folgenden Kapitel wollen wir die Hauptresultate für reguläre Matrizen und Vektoren aus ganz S^{d-1} beweisen. Dazu nutzen wir die zweite vorgestellte Variante des Markov-Erneuerungstheorems, welche die Harris-Rekurrenz von $(X_n)_{n\geq 0}$ voraussetzt, und von Alsmeyer [2] bewiesen wurde. Unsere Hauptaufgabe wird es also sein, die Harris-Rekurrenz der Steuerkette nachzuweisen, wobei wir dies wiederum direkt für transformierte Maße miterledigen werden. Zuvor defnieren wir jedoch das Modell, in dem wir von nun an rechnen wollen.

6.1. Modellierung

Ein wesentliches Konzept der bisherigen Beweise war die Existenz von sog. zulässigen Matrizen, die einen algebraisch einfachen, betraglich größten positiven Eigenwert λ besitzen, und unter $\mathbf{P}$ realisiert werden. Mit den Ergebnissen der Perron-Frobenius-Theorie konnten wir die Existenz eines topologisch rekurrenten Punktes zeigen, dieser war gerade der linke Eigenvektor b zum Eigenwert λ. Möchte man diese Beweise nun für Vektoren aus ganz S^{d-1} verallgemeinern, so tritt das Problem auf, dass unter einem Startvektor x, abhängig von dessen Komponente in Richtung des transponierten rechten Eigenvektors a, entweder Umgebungen von b oder Umgebungen von $-b$ unendlich oft erreicht werden. Weder b noch $-b$ ist also (für *alle* Startvektoren) topologisch rekurrent.

Da wir aber nur an Aussagen über

$$\log \|x\Pi_n\| = \log \|-x\Pi_n\|$$

interessiert sind, können wir ohne Informationsverlust die Vektoren x und $-x$ miteinander identifizieren, und erhalten so als neuen Zustandsraum

$$S^{d-1}_{\diagup\pm} := S^{d-1}\diagup R, \tag{6.1.1}$$

den Quotientenraum der S^{d-1} unter der Äquivalenzrelation

$$R = \{(x,x) : x \in S^{d-1}\} \cup \{(x,-x) : x \in S^{d-1}\}.$$

6.1.1. Eigenschaften von $S^{d-1}_{\diagup\pm}$

Da R kompakt ist, ist $S^{d-1}_{\diagup\pm}$, versehen mit der Quotiententopologie, ein kompakter Hausdorffraum. Dabei heißt eine Menge $A \in S^{d-1}_{\diagup\pm}$ offen in der Quotiententopologie, falls $p^{-1}(A)$ offen ist, $p : S^{d-1} \to S^{d-1}_{\diagup\pm}$ die Quotientenabbildung (Projektion). Mit $\mathcal{S}_\pm$ bezeichnen wir die zugehörige Borelsche σ-Algebra.

Bis auf Homöomorphie ist dies gerade der projektive Raum $P(\mathbb{R}^{d-1})$. Wir werden aber im Folgenden den Zustandsraum mit $S^{d-1}_{\diagup\pm}$ bezeichnen, da insbesondere die Repräsentanten der Äquivalenzklassen stets aus S^{d-1} gewählt werden sollen. Jedes Element $\overline{x} \in S^{d-1}_{\diagup\pm}$ besitzt dort genau zwei Repräsentanten, x und $-x$. Zur besseren Unterscheidung kennzeichnen wir Elemente aus $S^{d-1}_{\diagup\pm}$ mit $\overline{x}$, und einen (beliebigen) Repräsentanten mit x (ebenso Mengen $\overline{A} \in \mathcal{S}_\pm$). Alle nachfolgenden Rechnungen sind von der konkreten Wahl des Repräsentanten (x oder $-x$) unabhängig.

Für $\overline{x}, \overline{y} \in S^{d-1}_{\diagup\pm}$ definieren wir ihren Abstand durch

$$d(\overline{x},\overline{y}) := \sqrt{1 - \langle x,y\rangle^2}. \tag{6.1.2}$$

Da sich die beiden Repräsentanten von $\overline{x}$ in S^{d-1} nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden, ist diese Definition offensichtlich unabhängig von der Wahl der Repräsentanten. Beachtet man, dass $\|x\| = \|y\| = 1$, so sieht man leicht, dass

$$d(\overline{x},\overline{y}) = |\sin \sphericalangle(x,y)|.$$

6.1 Lemma
Die Abbildung $d : S^{d-1}_{\diagup\pm} \times S^{d-1}_{\diagup\pm} \to [0,\infty)$ wie oben definiert, ist eine Metrik auf $S^{d-1}_{\diagup\pm}$.

Beweis. Die positive Definitheit folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Die Symmetrie ist offensichtlich; es bleibt die Dreiecksungleichung zu zeigen. Dazu nutzen wir, dass d invariant ist unter orthogonalen Transformationen, denn für jede orthogonale Matrix A gilt

$$d(\overline{Ax},\overline{Ay}) = \sqrt{1 - \langle Ax,Ay\rangle^2} = \sqrt{1 - \langle x,y\rangle^2} = d(\overline{x},\overline{y}).$$

Darum genügt es,

$$d(\overline{y},\overline{z}) \le d(\overline{y},\overline{x}) + d(\overline{x},\overline{z})$$

für $x = e_1$, $y = y_1e_1 + y_2e_2$, $z = z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3$ mit $\|x\| = \|y\| = \|z\| = 1$ nachzuprüfen:

$$\begin{aligned} d(\overline{y}, \overline{z}) &= \big((y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (y_1z_3)^2 + (y_2z_3)^2\big)^{\frac{1}{2}} = \big((y_1z_2 - y_2z_1)^2 + z_3^2\big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \big((y_2 + z_2)^2 + z_3^2\big)^{\frac{1}{2}} \leq |y_2| + (z_2^2 + z_3^2)^{\frac{1}{2}} \leq d(\overline{y}, \overline{x}) + d(\overline{x}, \overline{z}). \end{aligned}$$

□

Das folgende Lemma liefert uns, dass die von dieser Metrik induzierte Topologie gleich der Quotiententopologie auf $S^{d-1}_{\diagup\pm}$ ist; außerdem erlaubt es uns, viele Rechnungen in S^{d-1} statt in $S^{d-1}_{\diagup\pm}$ auszuführen.

6.2 Lemma
Seien $\overline{x}, \overline{y} \in S^{d-1}$ und $x, y \in S^{d-1}$ beliebige Repräsentanten. Dann gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \|x - y\| \leq d(\overline{x}, \overline{y}) \leq \|x - y\| . \tag{6.1.3}$$

Beweis. Für die untere Abschätzung betrachte

$$\|x - y\| = \sqrt{\langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle} = \sqrt{2}\sqrt{1 - \langle x, y\rangle} \leq \sqrt{1 - \langle x, y\rangle^2} = \sqrt{2} \cdot d(\overline{x}, \overline{y}),$$

und für die obere Abschätzung (O.E. $\overline{x} \neq \overline{y}$)

$$\frac{\|x - y\|}{d(\overline{x}, \overline{y})} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{1 - \langle x, y\rangle}}{\sqrt{1 - \langle x, y\rangle^2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{1 - \langle x, y\rangle}}{\sqrt{1 + \langle x, y\rangle}\sqrt{1 - \langle x, y\rangle}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \langle x, y\rangle}} \geq 1.$$

□

6.1.2. Das neue Standardmodell

Nachdem wir uns mit unserem künftigen Zustandsraum vertraut gemacht haben, können wir nun das Modell definieren, in dem wir rechnen wollen. Wie zuvor bezeichnen wir dafür die Verteilung von M_1 kurzfristig mit μ.

6.3 Definition
Ein Paar $(r, \varkappa)$, wobei $r : S^{d-1}_{\diagup\pm} \to (0, \infty)$ stetig, heißt von nun an *maßdefinierend*, falls

$$r(\overline{x}) = \int \mu(dM)\|xM\|^{\varkappa} r(\overline{xM})$$

für alle $\overline{x} \in S^{d-1}_{\diagup\pm}$ gilt.

6.4 Definition und Satz (Modell $\mathfrak{M}_\pm$)

Gegeben sei eine Verteilung μ auf $M(d \times d, \mathbb{R})$, so dass $\mu(GL(d,\mathbb{R})) = 1$, sowie ein maßdefinierendes Paar $(r, \varkappa)$. Definiere

$$\begin{aligned}
\Omega :=& S^{d-1}_{\diagup\pm} \times \prod_{i=1}^{\infty} M(d \times d, \mathbb{R}), \\
\mathcal{A} :=& \mathcal{S}_{\pm} \otimes \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}, \\
(X_0, (M_n)_{n\geq 1}) :=& \mathrm{id}_{\Omega},
\end{aligned}$$

und für jedes $\overline{x} \in S^{d-1}_{\diagup\pm}$ ein W-Maß $\mathbb{P}_{\overline{x}}$ auf Ω durch

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{\overline{x}}\left(\overline{A} \times D_1 \times \cdots \times D_m \times M(d \times d, \mathbb{R})^{\infty}\right) := \\
&\delta_{\overline{x}}(\overline{A}) \cdot \frac{1}{r(\overline{x})} \int_{D_1 \times \cdots \times D_m} \cdots \int \mu(dM_1) \ldots \mu(dM_m) \|x\Pi_m\|^{\varkappa} r(\overline{x\Pi_m})
\end{aligned} \tag{6.1.4}$$

für alle $m \geq 0, \overline{A} \in \mathcal{S}_{\pm}, D_1, \ldots, D_m \in \mathcal{M}$.

Beweis. analog zu 3.2. □

Mit $U_0 := 0$,

$$\begin{aligned}
&\overline{X_n} : \Omega \to S^{d-1}_{\diagup\pm} && U_n : \Omega \to \mathbb{R} \\
&\overline{X_n} := \overline{X_0\Pi_n}, && U_n := \log \frac{\|X_0\Pi_n\|}{\|X_0\Pi_{n-1}\|},
\end{aligned}$$

ist $(\overline{X_n}, V_n)_{n\geq 0}$ ein Standard-MRW, und

$$\left(\Omega, \mathcal{A}, (\overline{X_n}, V_n)_{n\geq 0}, (\mathbb{P}_{\overline{x}})_{\overline{x} \in S^{d-1}_{\diagup\pm}}\right)$$

ein Standardmodell.

Schließlich definieren wir

$$\mathbf{P} := \delta_{\overline{e_1}} \otimes \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mu$$

als das Maß, unter dem $(M_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von unabhängig identisch gemäß μ verteilten Zufallsmatrizen ist.

6.2. Nachweis der Harris-Rekurrenz von $(\overline{X_n})_{n\geq 0}$

Von nun an legen wir stets ein Modell $\mathfrak{M}_\pm$ zugrunde. Wir beginnen mit zwei technischen Lemmata.

6.5 Lemma
Seien $x \in S^{d-1}$, $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle y aus

$$\begin{aligned} I_\delta(x) &= \{y \in S^{d-1} : |x_i - y_i| < \delta \ \ \forall\, 1 \leq i \leq d\} \\ &= \{y \in S^{d-1} : \max_{1\leq i\leq d} |x_i - y_i| < \delta\} \end{aligned}$$

eine invertierbare Matrix $F_y \in B_\varepsilon(E_d)$ existiert mit $y = xF_y^{-1}$. Dabei bezeichnet E_d die d-dimensionale Einheitsmatrix.

Beweis. Zur Aussage über die Invertierbarkeit von F_y beachte, dass für $\varepsilon < 1$ jedes $F \in B_\varepsilon(E_d)$ invertierbar ist:

Für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ gilt $\|xF - x\| = \|xF - xE_d\| < \|x\|$, und damit

$$\|xF\| \geq \|x\| - \|x - xF\| > 0.$$

Also ist $\ker F = \{0\}$, und damit F bereits regulär.

Die Bildung der inversen Matrix ist eine stetige Abbildung (und $E_d^{-1} = E_d$), also gibt es zu dem gegebenen ε ein $\varepsilon' > 0$, so dass

$$F_y^{-1} \in B_{\varepsilon'}(E_d) \ \Rightarrow F_y \in B_\varepsilon(E_d).$$

Also müssen wir ein $\delta > 0$ so bestimmen, dass für jedes $y \in I_\delta(x)$ ein $F_y^{-1} \in B_{\varepsilon'}(E_d)$ existiert mit $y = xF_y^{-1}$.

Da alle Normen auf dem $\mathbb{R}^d$ äquivalent sind, genügt es zu zeigen, dass ein $B_\delta(x)$ (bezüglich der euklidischen Norm) mit den gewünschten Eigenschaften existiert, dann folgt dasselbe für die Maximumsnorm.

Gehen wir jedoch zur Suche nach $B_\delta(x)$ (bezüglich der Euklidischen Norm) über, so wird unserer Problem invariant unter der Transformation mit einer orthogonalen Matrix A, also einer isometrischen Transformation. Wir können also ohne Einschränkungen annehmen, dass

$$x = \left(\frac{1}{\sqrt{d}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d}}\right).$$

Wähle nun

$$\delta := \frac{\varepsilon'}{\sqrt{d}}.$$

Jedes $y \in B_\delta(x)$ ist von der Form

$$y = \left(\frac{1}{\sqrt{d}} \pm \delta_1, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d}} \pm \delta_d\right),$$

wobei $0 \leq \delta_i < \delta$ für alle $1 \leq i \leq d$. Für die Matrix F_y^{-1}, gegeben durch

$$F_y^{-1} = \operatorname{diag}\left(1 \pm \delta_1\sqrt{d}\,, \ldots, 1 \pm \delta_1\sqrt{d}\right),$$

gilt dann $y = xF_y^{-1}$, sowie

$$\begin{aligned} \|F_y{-}1 - E_d\| &= \max_{x \in S^{d-1}} \left\|xF_y^{-1} - xE_d\right\| \;\leq\; \max_{1\leq i\leq d} \left|1 \pm \delta_1\sqrt{d} - 1\right| \\ &= \max_{1\leq i\leq d} \delta_i\sqrt{d} \;\leq\; \delta\sqrt{d} < \varepsilon'. \end{aligned}$$

□

6.6 Lemma

Seien eine Matrix $M_0 \neq 0$ und ein $c > 0$ gegben. Dann kann ein $c' > 0$ so gewählt werden, dass

$$FB_{\frac{c}{2}}(M_0) \subset \mathcal{B}_c(M_0)$$

für alle $F \in B_{c'}(E_d)$. Dabei bezeichnet

$$FB_{\frac{c}{2}}(M_0) = \{FM : M \in B_{\frac{c}{2}}(M_0)\}.$$

Beweis. Sei $M \in B_{\frac{c}{2}}(M_0)$, dann gilt

$$\begin{aligned} \|FM - M_0\| &\leq \|FM - M\| + \|M - M_0\| \leq \|F - E_d\|\,\|M\| + \|M - M_0\| \\ &\leq \|F - E_d\|\,(\|M_0\| + \|M - M_0\|) + \|M - M_0\| \\ &\leq \|F - E_d\|\,(\|M_0\| + \frac{c}{2}) + \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Nun ist M_0, und damit $\|M_0\|$ fest gewählt, also gibt es ein $c' > 0$, so dass für $\|F - E_d\| < c'$ der letzte Term kleiner als c wird. □

6.7 Satz

Es gebe ein $n > 0$, ein $c > 0$, $M_0 \in M(d \times d, \mathbb{R})$ und ein $\gamma_0 > 0$, so dass $\mathbf{P}^{\Pi_n}$ auf $B_c(M_0)$ eine Komponente mit Lebesgue-Dichte größer gleich γ_0 besitzt. Es gebe eine zulässige

Matrix. Dann besitzt $(X_n)_{n\geq 0}$ einen topologisch rekurrenten Punkt x^*.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es Matrizen $m_1, \ldots, m_k \in \operatorname{supp}(\mu)$, so dass die Matrix $\mathbf{m} = m_1 \cdots m_k$ einen algebraisch einfachen, betraglich größten Eigenwert $\lambda(\mathbf{m}) > 0$ besitzt (vgl. Definition 3.10). Dazu gibt es einen normierten linken $\tilde{b}$ sowie einen rechten Eigenvektor a^t mit $\tilde{b}a^t = 1$. Bezeichne

$$A_\delta := \{y \in S^{d-1} \ : \ |\langle y, a\rangle| \geq \delta\}.$$

Für beliebiges, aber festes $\delta > 0$ und $\overline{x} \in \overline{A}_\delta$ gilt nach Korollar 3.12 (c) sowie Lemma 6.2, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\overline{x}\in\overline{A_\delta}} d(\overline{x\mathbf{m}^n}, \overline{b}) = 0.$$

Für $\overline{x} \in \overline{A_\delta}$ kann nun mittels der Stetigkeit der Matrizenmultiplikation und der starken Markov-Eigenschaft genau wie im Beweis von 3.11 gezeigt werden, dass für alle $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}_{\overline{x}}\left(\overline{X_n} \in B_\varepsilon(\overline{b}) \text{ unendlich oft }\right) = 1.$$

Die Hauptarbeit des Beweises besteht also darin, solche $x \in S^{d-1}$ zu untersuchen, die keine Komponente in a-Richtung haben. Bei dieser Untersuchung werden wir auch festlegen, wie δ gewählt werden muss. Die grundlegende Idee dabei ist, dass wir eine „Scheibe“ der Dicke δ um die Menge $a^\perp \cap S^{d-1}$ finden müssen, so dass die Übergangswahrscheinlichkeit nach A_δ in jedem Punkt der Scheibe größer als eine positive Konstante ist. Dazu nutzen wir die Kompaktheit von $a^\perp \cap S^{d-1}$, welche uns gestattet, zunächst punktweise solche Umgebungen mit nach unten beschränkter Übergangswahrscheinlichkeit zu finden.

Für einen festen Vektor x bildet die Menge der Matrizen, die x in die Hyperebene $a^\perp$ abbilden, eine Lebesgue-Nullmenge: Ergänze a, x zu einer Basis des $\mathbb{R}^n$ und beachte, dass die Matrizen E_{ij} eine Basis von $M(d \times d, \mathbb{R})$ bilden. Die Matrizen, welche x_0 in $a^\perp$ abbilden, sind also ein (d^2-1)-dimensionaler Unterraum. Dieser muss unter $\lambda\!\!\lambda$ Masse Null tragen. Es gilt also

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{1}_{A_{\frac{1}{m}}} = 1 \quad \lambda\!\!\lambda^{(xM)^\sim}\text{-f.ü.}$$

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt dann

$$\lim_{m\to\infty} \int_{B_{\frac{c}{2}}(M_0)} \lambda\!\!\lambda(dM) \mathbb{1}_{A_{\frac{1}{m}}}((xM)^\sim) = \lambda\!\!\lambda(B_{\frac{c}{2}}(M_0)) > 0. \tag{6.2.1}$$

Dies lässt bereits erahnen, wie wir die Existenz einer $\lambda\!\!\lambda$-stetigen Komponente auf $B_c(M_0)$ ins Spiel bringen. Sei also x ein beliebiger Vektor aus $a^\perp \cap S^{d-1}$. Nach Lemma 6.6 gibt es ein $c' > 0$, so dass

$$FB_{\frac{c}{2}}(M_0) \subset \mathcal{B}_c(M_0)$$

für alle $F \in B_{c'}(E_d)$.

Weiterhin gibt es nach Lemma 6.5 ein $\delta = \delta(x) > 0$, so dass für alle $y \in I_\delta(x)$ eine invertierbare Matrix $F_y \in B_{c'}(E_d)$ existiert mit $y = xF_y^{-1}$. Mit (6.2.1) können wir nach eventueller Verkleinerung von δ außerdem sichergehen, dass

$$\int\limits_{B_{\frac{c}{2}}(M_0)} \lambda\!\!\lambda(dM)\mathbb{1}_{A_\delta}((xM)^\sim) > 0.$$

Zusammen haben wir also für alle $y \in I_\delta(x) \cup I_\delta(-x)$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{\overline{y}}\left(\overline{X_n} \in \overline{A}_\delta\right) \\
&= \frac{1}{r(\overline{y})} \int \mathbf{P}^{\Pi_n}(dM)\|yM\|^\varkappa r(\overline{yM})\mathbb{1}_{\overline{A}_\delta}(\overline{yM}) \\
&\geq \min_{\overline{z_1},\overline{z_2}\in S^{d-1}_{\diagup\pm}} \frac{r(\overline{z_1})}{r(\overline{z_2})}\, \gamma_0 \int\limits_{F_yB_{\frac{c}{2}}(M_0)} \lambda\!\!\lambda(dM)\|yM\|^\varkappa \mathbb{1}_{A_\delta}((yM)^\sim) \\
&= \min_{\overline{z_1},\overline{z_2}\in S^{d-1}_{\diagup\pm}} \frac{r(\overline{z_1})}{r(\overline{z_2})}\, \gamma_0 \int\limits_{F_yB_{\frac{c}{2}}(M_0)} \lambda\!\!\lambda(dM)\left\|xF_y^{-1}M\right\|^\varkappa \mathbb{1}_{A_\delta}((xF_y^{-1}M)^\sim) \\
&= \min_{\overline{z_1},\overline{z_2}\in S^{d-1}_{\diagup\pm}} \frac{r(\overline{z_1})}{r(\overline{z_2})}\, \gamma_0 \int\limits_{B_{\frac{c}{2}}(M_0)} \lambda\!\!\lambda^{F_y^{-1}}(dM)\|xM\|^\varkappa \mathbb{1}_{A_\delta}((xM)^\sim) \\
&\geq \left(\min_{F\in B_{c'}(E_d)} \det(F)\right) \min_{\overline{z_1},\overline{z_2}\in S^{d-1}_{\diagup\pm}} \frac{r(\overline{z_1})}{r(\overline{z_2})}\, \gamma_0 \min_{M\in B_{\frac{c}{2}}(M_0)} \|xM\|^\varkappa \int\limits_{B_{\frac{c}{2}}(M_0)} \lambda\!\!\lambda(dM)\mathbb{1}_{A_\delta}((xM)^\sim) \\
&=: \eta(x) > 0.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der zweiten Zeile die Existenz einer $\lambda\!\!\lambda$-stetigen Komponente, sowie Lemma 6.6 genutzt, und Lemma 6.5 in der dritten Zeile. Beachte, dass die auftretenden Minima von stetigen positiven Funktionen auf kompakten Mengen genommen werden, also auch strikt positiv sind. Außerdem ist $y \in A_\delta \Leftrightarrow (-y) \in A_\delta$, wir können also unbesorgt in der zweiten Zeile zu den Repräsentanten übergehen.

Wir können nun die kompakte Menge $a^{\perp} \cap S^{d-1}$ mit δ-Quadern I_δ um jeden Punkt x überdecken, und erhalten so aufgrund der Kompaktheit ein minimales δ und ein η, so dass

$$\mathbb{P}_{\overline{y}}\left(\overline{X_n} \in \overline{A}_\delta\right) \geq \eta > 0$$

für alle $y \in \overline{A}_\delta^c$. Für die Stoppzeit

$$T := \inf\{\overline{X_n} \in \overline{A_\delta}\}$$

gilt also aufgrund der Markoveigenschaft, dass für alle $l \geq 1$ und alle $\overline{y} \in \overline{A_\delta}$

$$\mathbb{P}_{\overline{y}}\left(T > l\right) < (1-\eta)^l.$$

Somit ist T $\mathbb{P}_{\overline{y}}$-*f.s.* endlich für alle $\overline{y} \in \overline{A_\delta}$, und mit der starken Markov-Eigenschaft folgt schließlich für alle $\varepsilon > 0$, dass

$$\mathbb{P}_{\overline{y}}\left(\overline{X_n} \in B_\varepsilon(\overline{b}) \text{ unendlich oft}\right) = 1. \qquad \square$$

6.8 Satz

Unter den Voraussetzungen von Satz 6.7 ist $(\overline{X_n})_{n\geq 0}$ positiv Harris-rekurrent.

6.9 Bemerkung

Eine allgemeine Theorie über die Minorisierungsbedingung für quasi-$\lambda\!\!\lambda$-stetige Übergangskerne findet sich in [17], insbesondere Abschnitt 4; allerdings nur für Markov-Erneuerungsprozesse (d.h. U_n nichtnegativ).

Beweis.

1.Schritt : Harris-Rekurrenz

Nach Satz 6.7 besitzt $(\overline{X_n})_{n\geq 0}$ einen topologisch rekurrenten Punkt $\overline{x}^*$. Jede offene Umgebung von $\overline{x}^*$ ist also eine Rekurrenzmenge für $(\overline{X_n})_{n\geq 0}$.

Zu dem c aus der Voraussetzung gibt es nach Lemma 6.6 ein $c' > 0$, so dass

$$FB_{\frac{c}{2}}(M_0) \subset \mathcal{B}_c(M_0)$$

für alle $F \in B_{c'}(E_d)$. Zu c' wähle nach Lemma 6.5 wiederum ein geeignetes $\delta > 0$, so dass es zu jedem $y \in B_\delta(\overline{x^*})$ eine invertierbare Matrix $F_y \in B_{c'}(E_d)$ gibt mit $y = xF_y^{-1}$.

Es gilt dann für alle $\overline{y} \in B_\delta(\overline{x^*})$ und $\overline{A} \in \mathcal{S}_\pm$, dass

$$
\begin{aligned}
&P'^{(n)}(\overline{y}, \overline{A}) \\
&= \frac{1}{r(\overline{y})} \int \mathbf{P}^{\Pi_n}(dM) \|yM\|^{\varkappa} r(\overline{yM}) \mathbb{1}_{\overline{A}}(\overline{yM}) \\
&\geq \left(\min_{\overline{z_1}, \overline{z_2} \in S^{d-1}_{\diagup \pm}} \frac{r(\overline{z_1})}{r(\overline{z_2})} \right) \gamma_0 \int_{F_y B_{\frac{c}{2}}(M_0)} \lambda\!\!\lambda(dM) \|yM\|^{\varkappa} \mathbb{1}_A(\overline{yM}) \\
&\geq \left(\min_{z \in \overline{B_\delta(x)},\ M \in \overline{B_c(M_0)}} \|zM\|^{\varkappa} \right) \gamma_1 \int_{F_y B_{\frac{c}{2}}(M_0)} \lambda\!\!\lambda(dM) \mathbb{1}_A(\overline{x^* F_y^{-1} M}) \\
&= \left(\min_{z \in \overline{B_\delta(x)},\ M \in \overline{B_c(M_0)}} \|zM\|^{\varkappa} \right) \gamma_1 \int_{B_{\frac{c}{2}}(M_0)} \lambda\!\!\lambda^{F_y^{-1}}(dM) \mathbb{1}_A(\overline{xM}) \\
&\geq \gamma_2 \int_{B_{\frac{c}{2}}(M_0)} \lambda\!\!\lambda(dM) \mathbb{1}_A(\overline{x^* M}) \mathbb{1}_B(\log \|x^* M\|).
\end{aligned}
$$

Mit $\mathfrak{R} := \overline{B}_\delta(x^*)$ und

$$
\psi(\overline{A}) := \frac{1}{\lambda\!\!\lambda(B_{\frac{c}{2}}(M_0))} \int_{B_{\frac{c}{2}}(M_0)} \lambda\!\!\lambda(dM) \mathbb{1}_{\overline{A}}(\overline{x^* M}) \tag{6.2.2}
$$

für alle $\overline{A} \in \mathcal{S}_\pm$, gilt dann für alle $\overline{y} \in \mathfrak{R}$

$$
P'^{(n)}(\overline{y}, \cdot) \geq \gamma_2 \psi(\cdot).
$$

Dabei ist

$$
\gamma_2 := \left(\min_{\overline{z_1}, \overline{z_2} \in S^{d-1}_{\diagup \pm}} \frac{r(\overline{z_1})}{r(\overline{z_2})} \right) \left(\min_{z \in \overline{B_\delta(x)},\ M \in \overline{B_c(M_0)}} \|zM\|^{\varkappa} \right) \left(\min_{F \in \overline{B_{c'}(E_d)}} \det(F) \right) \gamma_0
$$

strikt positiv, da jeweils Minima von stetigen, positiven Funktionen auf kompakten Mengen genommen werden (beachte, dass die auftauchenden Matrizen regulär sind, da $\|M - E_d\| < 1$).

Da $\mathfrak{R}$ Rekurrenzmenge für $(\overline{X_n})_{n \geq 0}$ ist, existiert ein $m \geq 1$ mit

$$
\gamma_3 := \mathbb{P}_\psi \left(\overline{X_m} \in \mathfrak{R} \right) > 0,
$$

denn es gilt ja für alle $\overline{x} \in S^{d-1}_{\diagup\pm}$, dass $\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}_{\overline{x}}\left(\overline{X_m} \in \mathfrak{R}\right) = \infty$. Nach dem Satz von Fubini gilt dann ebenfalls

$$\infty = \sum_{m=0}^{\infty} \int \mathbb{P}_{\overline{x}}\left(\overline{X_m} \in \mathfrak{R}\right) \psi(d\overline{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}_{\psi}\left(\overline{X_m} \in \mathfrak{R}\right).$$

Wir setzen nun

$$\varphi := \gamma_3^{-1} \mathbb{P}_{\psi}\left(\overline{X_m} \in (\cdot \cap \mathfrak{R})\right) = \gamma_3^{-1} \int P^m(\overline{x}, \cdot)\psi(d\overline{x} \times \mathbb{R}),$$

dann gilt $\varphi(\mathfrak{R}) = 1$ sowie

$$P'^{(n+m)}(\overline{y}, \cdot) = \int P'^{(m)}(\overline{x}, \cdot) P'^{(n)}(\overline{y}, d\overline{x}) \geq \gamma_2 \int P'^{(m)}(\overline{x}, \cdot)\psi(d\overline{x}) \geq \gamma_2\gamma_3\varphi =: \gamma\varphi$$

für alle $y \in \mathfrak{R}$. Also ist $(\overline{X_n})_{n\geq 0}$ Harris-rekurrent.

2.Schritt : Positive Harris-Rekurrenz
Satz 3.13 bleibt auch in unserem neuen Modell gültig, und liefert uns die Existenz einer stationären Verteilung π für $(\overline{X_n})_{n\geq 0}$. Nach Satz 1.18 ist diese eindeutig, und $(\overline{X_n})_{n\geq 0}$ dann positiv Harris-rekurrent.

□

Aus der Harris-Rekurrenz folgt nun auch, dass $(\overline{X_n})_{n\geq 0}$ φ-irreduzibel ist.

Später wird noch die zusätzliche Voraussetzung gefordert werden, dass für jedes $x \in S^{d-1}$ und jede offene Menge $U \subset S^{d-1}$ ein $n \geq 1$ existiere mit $\mathbf{P}\left((x\Pi_n)^{\sim} \in U\right) > 0$.

Es sei darauf hingewiesen, dass aus dieser Voraussetzung allein noch nicht die folgt, dass $(X_n)_{n\geq 0}$ $\lambda\!\!\lambda_{S^{d-1}}$-irreduzibel ist: Wenn alle Realisierungen von M_1 skalare Vielfache einer einzigen regulären Matrix sind, so ist der Pfad N von $((x\Pi_n)^{\sim})_{n\geq 0}$ deterministisch. $U\backslash N$ ist dann nicht mehr offen, besitzt aber Lebesgue-Maß größer Null. Jedoch ist $\mathbf{P}\left((x\Pi_n)^{\sim} \in U\backslash N\right) = 0$. Die quasi-$\boldsymbol{\lambda}$-Stetigkeit von $\mathbf{P}^{\Pi_n}$ ist hier also eine notwendige Bedingung für die Irreduzibilität von $(X_n)_{n\geq 0}$.

6.10 Bemerkung

Allgemein folgt für einen MRW aus der Harris-Rekurrenz der Steuerkette $(X_n)_{n\geq 0}$ sofort die Harris-Rekurrenz von $(X_n, U_{n+1})_{n\geq 0}$ mit Regenerationsmenge $\mathfrak{R} \times \mathbb{R}$: Offenbar ist nur die Minorisierungsbedingung zu zeigen, hier folgt aber aus $\mathbb{P}_x(X_l \in \cdot) \geq \gamma\varphi$, dass

$$\mathbb{P}_{x,t}(X_l \in A, U_{l+1} \in B) = \int_A P'^{(l)}(x,dy) P(y, S \times B) \geq \gamma \int_A \varphi(dy) P(y, S \times B)$$

für alle $x \in \mathfrak{R}$, $t \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{S}$ und $B \in \mathcal{B}$. Eine stationäre Verteilung ist durch $\mathbb{P}_\pi^{X_0,U_1}$ gegeben, dies zeigt zugleich auch die positive Rekurrenz.

6.11 Satz

Unter den Voraussetzungen von Satz 6.7 ist $(\overline{X_n})_{n\geq 0}$ positiv Harris-rekurrent (wie wir bereits gesehen haben), und aus der Existenz der $\lambda\!\!\lambda$-stetigen Komponente folgt, dass $(\overline{X_n}, V_n)_{n\geq 0}$ nichtarithmetisch ist bzgl. der stationären Verteilung π der Steuerkette.

Beweis. Angenommen, $(\overline{X_n}, V_n)$ sei nicht nicht-arithmetisch. Dann existiert ein $d > 0$ und eine messbare Funktion $f : S^{d-1}_{/\pm} \to [0,d)$ mit

$$\mathbb{P}\left(V_1 \in f(\overline{X_0}) - f(\overline{X_1}) + d\mathbb{Z} \mid (\overline{X_0}, \overline{X_1}) = \cdot\right) = 1 \quad \mathbb{P}_\pi\text{-}f.s.^{(\overline{X_0},\overline{X_1})}.$$

Dann ist nach der Markov-Eigenschaft und der Stationarität von π auch

$$\mathbb{P}\left(d^{-1}\left(V_i - f(\overline{X_{i-1}}) + f(\overline{X_i})\right) \in \mathbb{Z} \mid (\overline{X_{i-1}}, \overline{X_i}) = \cdot\right) = 1 \quad \mathbb{P}_\pi\text{-}f.s.^{(\overline{X_{i-1}},\overline{X_i})}$$

für alle $i \geq 1$. Erinnern wir uns an den Zusammenhang zwischen der Fouriertransformierten einer Zufallsgröße und ihrem Gittertyp, so können wir durch Anwenden der Eigenschaft (c) aus 1.2 und einer Teleskopsumme folgern, dass

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\pi\left[e^{2\pi i d^{-1}(V_n - f(X_0) + f(X_n))}\right] \\
&= \mathbb{E}_\pi\left[e^{2\pi i d^{-1}(\sum_{i=1}^n (V_i - V_{i-1} - f(X_{i-1}) + f(X_i)))}\right] \\
&= \mathbb{E}_\pi\left[\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n e^{2\pi i d^{-1}(V_i - V_{i-1} - f(X_{i-1}) + f(X_i))} \middle| \mathcal{F}_n\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_\pi\left[\prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[e^{2\pi i d^{-1}(V_i - V_{i-1} - f(X_{i-1}) + f(X_i))} \middle| X_i, X_{i-1}\right]\right] \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Insbesondere ist also für π-fast alle $\overline{x} \in S^{d-1}_{/\pm}$

$$1 = \mathbb{E}_{\overline{x}}\left[e^{2\pi i d^{-1}(V_n - f(X_0) + f(X_n))}\right]$$

$$= \frac{1}{r(\overline{x})} \int \mathbf{P}^{\Pi_n}(dM) e^{2\pi i d^{-1}(\log\|xM\| - f(\overline{x}) + f(\overline{xM}))} \|xM\|^{\varkappa} r(\overline{xM}).$$

Andererseits besitzt $\mathbf{P}^{\Pi_n}$ nach Voraussetzung eine Lebesgue-stetige Komponente, und mit der Aufteilung $\mathbf{P}^{\Pi_n} = \mathbb{Q} + \mathbb{V}$ in die Lebesgue-stetige Komponente $\mathbb{Q}$ und ein Restmaß $\mathbb{V}$ muss dann für π-fast alle $\overline{x} \in S^{d-1}_{/\pm}$ gelten, dass

$$\begin{aligned} 1 =& \frac{1}{\mathbb{Q}(S^{d-1}_{/\pm})} \frac{1}{r(\overline{x})} \int \mathbb{Q}(dM) e^{2\pi i d^{-1}(\log\|xM\| - f(\overline{x}) + f(\overline{xM}))} \|xM\|^{\varkappa} r(\overline{xM}) \\ =& \frac{1}{\mathbb{Q}(S^{d-1}_{/\pm})} \frac{1}{r(\overline{x})} \int\limits_{B_c(M_0)} \lambda\!\!\lambda(dM) e^{2\pi i d^{-1}(\log\|xM\| - f(\overline{x}) + f(\overline{xM}))} \|xM\|^{\varkappa} r(\overline{xM}). \end{aligned}$$

Da die Funkion f nur von der Richtung $\overline{xM}$ des Vektors xM abhängt, kann

$$\log\|xM\| - f(\overline{x}) + f(\overline{xM}) \in \mathbb{Z}$$

nur auf einer $\lambda\!\!\lambda$-Nullmenge gelten, die e-Funktion ist also $\lambda\!\!\lambda$-f.ü. ungleich 1. Somit kann das Integral über das W-Maß mit der $\lambda\!\!\lambda$-Dichte

$$\mathbb{Q}(S^{d-1}_{/\pm})^{-1} r(\overline{x})^{-1} \|xM\|^{\varkappa} r(\overline{xM}) \mathbb{1}_{B_c(M_0)}(M)$$

nicht 1 ergeben, Widerspruch. $\square$

Bevor wir nun analoge Resultate zu Satz 4.3 herleiten können, müssen wir uns noch um die Bedingung $\mathbb{E}_{\xi^*}[V_1] > 0$ des Erneuerungstheorems kümmern. Dazu zeigen wir eine Version des Satzes von Furstenberg-Kesten für reguläre Matrizen, deren Beweis sich nach unseren Vorarbeiten recht kurz ausnimmt.

6.12 Satz

Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 6.7 gelte

$$\mathbf{E}\left[\log^+\|M_1\|\right] < \infty.$$

Dann existiert ein $\alpha \in [-\infty, \infty)$, so dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\|xM_1 \cdots M_n\| = \alpha \quad \mathbf{P}\text{-}f.s.$$

für alle $x \in S^{d-1}$, sowie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|M_1 \cdots M_n\| = \alpha \quad \mathbf{P}\text{-}f.s.$$

Außerdem ist $(X_n)_{n\geq 0}$ positiv Harris-rekurrent, und für die eindeutig bestimmte stationäre Verteilung π gilt

$$\alpha = \int \mathbf{E}\left[\log \|xM_1\|\right] \pi(d\overline{x}) = \mathbb{E}_\pi\left[V_1\right].$$

Beweis. Wir haben bereits in Bemerkung 6.10 gesehen, dass $(\overline{X_n}, U_{n+1})_{n\geq 0}$ positiv Harris-rekurrent ist. Nach Satz 1.18 (c) gilt dann das starke Gesetz der großen Zahlen für jede messbare Funktion g: $S^{d-1}_{\diagup\pm} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{E}_\pi\left[|g(X_0, U_1)|\right] < \infty$. Nach Voraussetzung ist

$$\mathbb{E}_\pi\left[U_1^+\right] \leq \mathbf{E}\left[\log^+ \|M_1\|\right] < \infty,$$

also lässt sich mittels Stutzen folgern, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} U_k = \mathbb{E}_\pi\left[U_1\right] = \mathbb{E}_\pi\left[V_1\right] =: \alpha \quad \mathbb{P}_{\overline{x}}\text{-}f.s.$$

für jedes $\overline{x} \in S^{d-1}_{\diagup\pm}$. Mit der selben Argumentation wie im Beweis von Satz 4.1 folgt, dass

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|xM_1 \cdots M_n\| = \alpha\right) = 1$$

für alle $x \in S^{d-1}$, und weiter

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|M_1 \cdots M_n\| = \alpha \quad \mathbf{P}\text{-}f.s. \qquad \square$$

7. Erneuerungstheorie für Produkte regulärer Zufallsmatrizen

7.1. Positiver Ljapunov-Exponent

Nun können wir das bisher Gezeigte zusammentragen, und erhalten das Analogon zu 4.3 für den Fall regulärer Matrizen. In diesem Abschnitt gilt $r \equiv 1$ und $\varkappa = 0$, also

$$\mathbb{P}_{\overline{x}}^{(M_n)_{n\geq 1}} = \mathbf{P}^{(M_n)_{n\geq 1}}$$

für alle $\overline{x} \in S^{d-1}_{\diagup\pm}$.

7.1 Satz

Es sei $(M_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von unabhängig, identisch verteilten Zufallsmatrizen mit Werten in $M(d \times d, \mathbb{R})$, für die folgende Voraussetzungen erfüllt seien:

1. $\mathbf{P}(M_1 \text{ ist regulär}) = 1$ *und* $\mathbf{E}\left[\log^+ \|M_1\|\right] < \infty$.
2. *Es gebe ein $n > 0$, ein $c > 0$, eine Matrix $M_0 \in GL(d, \mathbb{R})$ und ein $\gamma_0 > 0$, so dass $\mathbf{P}^{\Pi_n}$ auf $B_c(M_0)$ eine Komponente mit Lebesgue-Dichte größer gleich γ_0 besitzt.*
3. *Es gebe eine zulässige Matrix.*

Dann gibt es ein $\alpha \in [-\infty, \infty)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|M_1 \cdots M_n\| = \alpha \quad \mathbf{P}\text{-f.s.}$$

Im Falle $\alpha > 0$ existiert ein W-Maß π auf $S^{d-1}_{\diagup\pm}$ und eine π-Nullmenge $\overline{N}$, so dass für alle $x \in S^{d-1}$ mit $\overline{x} \notin \overline{N}$ und alle $h \geq 1$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\left[\#\{n \geq 0 \;:\; t \leq \|xM_1 \cdots M_n\| \leq th\}\right] = \alpha^{-1} \log h.$$

Beweis. Wir haben in Satz 6.8 gezeigt, dass unter den gegebenen Voraussetzungen die Markov-Kette $(\overline{X_n})_{n\geq 0}$ positiv Harris-rekurrent ist. Somit besitzt $(\overline{X_n})_{n\geq 0}$ eine eindeutige stationäre Verteilung π auf $S^{d-1}_{/\pm}$. Unter dieser ist der Markov-Random-Walk $(\overline{X_n}, V_n)_{n\geq 0}$ nach Satz 6.11 nichtarithmetisch. Schließlich folgt aus Satz 6.12 die $\mathbf{P}$-fast sichere Konvergenz von $\frac{1}{n}\log\|M_1\cdots M_n\|$ gegen α, sowie $\mathbb{E}_\pi[V_1]=\alpha$. Im Falle $\alpha>0$ ist also das Erneuerungstheorem 1.20 anwendbar, und wir erhalten insbesondere für alle $h>1$ und π-fast alle $\overline{x}\in S^{d-1}_{/\pm}$

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}\left[\#\{n\geq 0\ :\ t\leq\|xM_1\cdots M_n\|\leq th\}\right]\\
=&\lim_{(\log t)\to\infty}\mathbf{E}\left[\#\{n\geq 0\ :\ \log t\leq\log\|xM_1\cdots M_n\|\leq\log t+\log h\}\right]\\
=&\,U_{\overline{x}}(S^{d-1}_{/\pm}\times(\log t)+[0,\log h])\\
=&\,\alpha^{-1}\ \pi(S^{d-1}_{/\pm})\ \lambda([0,\log h])=\alpha^{-1}\log h.
\end{aligned}$$

□

7.2. Existenz transformierter Maße

Um die Resultate für den Fall eines negativen Ljapunov-Exponenten

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|M_1\cdots M_n\|=\beta<0\quad\mathbf{P}\text{-}f.s.$$

herleiten zu können, müssen wir wie in Kapitel 5 die Existenz eines nichttrivialen maßdefinierenden Paares zeigen. Wir werden der dortigen Beweisführung weitestgehend folgen, und einige Resultate auch direkt übernehmen können.

Unser erstes Ziel wird es sein, den folgenden Satz zu beweisen, der die Entsprechung von Satz 5.1 ist.

7.2 Satz
Es gelte:

1. $\mathbf{P}(M_1$ ist regulär$)=1$.

2. *Es gebe ein $n>0$, ein $c>0$, eine Matrix $M_0\in GL(d,\mathbb{R})$ und ein $\gamma_0>0$, so dass $\mathbf{P}^{\Pi_n}$ auf $B_c(M_0)$ eine Komponente mit Lebesgue-Dichte größer gleich γ_0 besitzt.*

3. *Es gebe eine zulässige Matrix.*

4. *Für jedes $x\in S^{d-1}$ und jede offene Menge $U\subset S^{d-1}$ existiere ein $n\geq 1$ mit* $\mathbf{P}\left(x\Pi_n\in U\right)>0$.

Es existiere ein $\varkappa_0>0$, so dass gelte

5. $\mathbf{E}\left[\|M_1\|^{\varkappa_0}\log^+\|M_1\|\right]<\infty$,

6. $\mathbf{E}[\lambda(M_1)^{\varkappa_0}] \geq 1$, *wobei* $\lambda(M_1)$ *den kleinsten Eigenwert von* $(M_1 M_1^t)^{\frac{1}{2}}$ *bezeichne.*

Dann gibt es für jedes $\varkappa \in [0, \varkappa_0]$ *eine Zahl* $\varrho_\varkappa > 0$ *und eine positive stetige Funktion* $r_\varkappa : S^{d-1}_{/\pm} \to (0, \infty)$, *so dass für jedes* $\varkappa$ *und jedes* $\overline{x} \in S^{d-1}_{/\pm}$ *gilt*

$$\mathbf{E}\left[\|xM_1\|^\varkappa r(\overline{xM_1})\right] = \varrho_\varkappa r(\overline{x}).$$

Außerdem folgt:

(a) $\log \varrho_\varkappa = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^\varkappa\right]$.

(b) Es gibt eine Konstante $C > 0$, *so dass*

$$\varrho_\varkappa \geq \left(C \cdot \mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^\varkappa\right]\right)^{\frac{1}{n}}$$

für alle $n \geq 1$.

(c) $\varrho_0 = 1$ *und* $\varrho_{\varkappa_0} \geq 1$.

Auch diesen Satz teilen wir in mehrere Lemmata auf:

7.3 Lemma

Es seien die Voraussetzungen von Satz 7.2 erfüllt. Dann gibt es für jedes $\varkappa \in [0, \varkappa_0]$ *eine Zahl* $\varrho_\varkappa > 0$, *die die Eigenschaften (a) - (c) aus Satz 7.2 erfüllt.*

Beweis.

1.Schritt : Definition von $\varrho_\varkappa$

Wir betrachten wieder die Abbildung

$$\begin{aligned} T_\varkappa \ &: \ C_b(S^{d-1}_{/\pm}) \to C_b(S^{d-1}_{/\pm}) \\ T_\varkappa f(x) &:= \mathbf{E}\left[\|xM_1\|^\varkappa f(\overline{xM_1})\right], \end{aligned}$$

deren Eigenfunktionen wir suchen. Die Wohldefinition dieser Abbildung folgt wie in Lemma 5.2, und ebenso ist wiederum nach Korollar A.12 die adjungierte Abbildung $T'_\varkappa \ : \ \mathbf{M}_{reg}(\mathcal{S}_\pm) \to \mathbf{M}_{reg}(\mathcal{S}_\pm)$ gegeben durch

$$\int (T'_\varkappa \nu)(d\overline{x}) f(\overline{x}) = \int \nu(d\overline{x})(T_\varkappa f)(\overline{x}) = \int \nu(d\overline{x}) \mathbf{E}\left[\|xM_1\|^\varkappa f(\overline{xM_1})\right] \tag{7.2.1}$$

für alle $f \in C_b(S^{d-1}_{/\pm})$. Da

$$f \geq 0 \ \ (f > 0) \ \ \Rightarrow \ \ T_\varkappa f \geq 0 \ \ (T_\varkappa f > 0),$$

ist $T'_\varkappa$ ein positiver Operator.
Weiterhin ist $xM_1 \neq 0$ $\mathbf{P}$-*f.s.*, da $\mathbf{P}\,(M_1 \text{ ist regulär }) = 1$, und damit $\mathbf{E}\,[\|xM_1\|^\varkappa] > 0$ für alle $x \in S^{d-1}$. Somit ist

$$\begin{aligned}\tilde{T}_\varkappa\ &:\ \mathfrak{W}(\mathcal{S}_\pm) \to \mathfrak{W}(\mathcal{S}_\pm)\\ \nu \mapsto \tilde{T}_\varkappa\nu &:= (\|T'_\varkappa\nu\|)^{-1}T'_\varkappa\nu = \left(\int \nu(d\overline{x})\mathbf{E}\,[\|xM_1\|^\varkappa]\right)^{-1} T'_\varkappa\nu\end{aligned}$$

eine wohldefinierte Abbildung, wobei $\mathfrak{W}(\mathcal{S}_\pm)$ die Menge der W-Maße auf $\mathcal{S}_\pm$ bezeichnet. Deren Stetigkeit bzgl. der schwachen Konvergenz folgt wie in Lemma 5.2. Nach Korollar A.11 besitzt $\tilde{T}_\varkappa$ dann wiederum einen Fixpunkt $\nu_\varkappa \in \mathfrak{W}$. Das W-Maß $\nu_\varkappa$ ist damit zugleich ein Eigenmaß von $T_\varkappa$. Wir wählen nun $\varrho_\varkappa$ als den zugehörigen Eigenwert:

$$\varrho_\varkappa := \int (T'_\varkappa\,\nu_\varkappa)(d\overline{x})\mathbb{1}_{S^{d-1}/\pm}(\overline{x}) = \int \nu_\varkappa(d\overline{x})\,\mathbf{E}\,[\|xM_1\|^\varkappa]\,. \tag{7.2.2}$$

2.Schritt : Werte für ϱ_0 und $\varrho_{\varkappa_0}$
Daraus folgt direkt

$$\min_{x \in S^{d-1}} \mathbf{E}\,[\|xM_1\|^\varkappa] \leq \varrho_\varkappa \leq \mathbf{E}\,[\|M_1\|^\varkappa]\,.$$

Offenbar ist dann $\varrho_0 = 1$; wir zeigen nun, dass $\varrho_{\varkappa_0} \geq 1$:

$$\|xM\| = \sqrt{\langle xM, xM\rangle} = \sqrt{xMM^tx^t} = \sqrt{\langle xMM^t, x\rangle} \geq \lambda(M)\,\|x\|\,,$$

wobei $\lambda(M)$ den kleinsten Eigenwert von $\sqrt{MM^t}$ bezeichnet. Nach Voraussetzung ist dann

$$\mathbf{E}\,[\|xM_1\|^{\varkappa_0}]\ \geq\ \mathbf{E}\,[\lambda(M_1)^{\varkappa_0}\|x\|^{\varkappa_0}]\ \geq\ \mathbf{E}\,[\lambda(M_1)^{\varkappa_0}]\ \geq\ 1$$

für alle $x \in S^{d-1}$; und somit $\varrho_{\varkappa_0} \geq 1$.

3.Schritt : $\varrho_\varkappa = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\,[\|\Pi_n\|^\varkappa]^{\frac{1}{n}}$
Wie in Lemma 5.2 zeigt eine Induktion, dass $T^n_\varkappa f(\overline{x}) = \mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^\varkappa f(\overline{x\Pi_n})\right]$, sowie

$$\varrho^n_\varkappa = \int ((T'_\varkappa)^n\nu_\varkappa)(d\overline{x})\mathbb{1}(\overline{x}) = \int \nu_\varkappa(d\overline{x})T^n_\varkappa\mathbb{1}(\overline{x}) = \int \nu_\varkappa(d\overline{x})\mathbf{E}\,[\|x\Pi_n\|^\varkappa]\,. \tag{7.2.3}$$

Das gibt uns schon die Ungleichung

$$\varrho^n_\varkappa \leq \mathbf{E}\,[\|\Pi_n\|^\varkappa]\,. \tag{7.2.4}$$

Für eine Abschätzung nach unten betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} h : \partial B_1(E_d) \times [0, \varkappa_0] &\to \mathbb{R} \\ (M, \varkappa) &\mapsto \int \nu_\varkappa(d\overline{x}) e^{\varkappa \log \|xM\|}. \end{aligned}$$

Der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert die Stetigkeit von h; außerdem ist h strikt positiv:

Denn angenommen, es gäbe eine Matrix $M_0 \in \partial B_1(E_d)$ mit $\int \nu_\varkappa(d\overline{x}) e^{\varkappa \log \|xM_0\|} = 0$. Dann wäre

$$\|xM\|^\varkappa = 0 \quad \nu_\varkappa\text{-f.s.} \quad \Rightarrow \quad \nu_\varkappa(\ker M_0^t) = 1.$$

Da M_0 nicht die Nullmatrix ist, ist $\ker M_0^t$ ein echter Unterraum. Also ist

$$A = \mathbb{R}^d \backslash \ker M_0^t$$

offen, und nach Voraussetzung gibt es dann zu $\overline{x_0} \in \operatorname{supp}(\nu_\varkappa)$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathbf{P}\left(\overline{x_0 \Pi_n} \in \overline{A}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}\left[\|x_0 \Pi_n\|^\varkappa \mathbb{1}_{\overline{A}}(\overline{x_0 \Pi_n})\right] > 0.$$

Da $\overline{A}$ offen ist, ist dieser Erwartungswert auch in einer Umgebung von x_0 positiv, und wir erhalten

$$0 < \int \nu_\varkappa(d\overline{x}) \mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^\varkappa \mathbb{1}_{\overline{A}}(\overline{x\Pi_n})\right] = \int \left((T'_\varkappa)^n \nu_\varkappa\right)(d\overline{x}) \mathbb{1}_{\overline{A}}(\overline{x}) = \varrho_\varkappa^n \int \nu_\varkappa(d\overline{x}) \mathbb{1}_{\overline{A}}(\overline{x}) = 0,$$

was einen Widerspruch liefert.

Also ist h strikt positiv und stetig auf dem Kompaktum $\partial B_1(E_d) \times [0, \varkappa_0]$, nimmt also ein Minimum $C > 0$ an. Damit haben wir gezeigt, dass

$$\inf_{\{M \in M(d \times d, \mathbb{R}) : \|M\| = 1\}} \int \nu_\varkappa(d\overline{x}) \|xM\|^\varkappa \geq C > 0$$

für alle $\varkappa \in [0, \varkappa_0]$. Dies können wir nun benutzen, um unter Einsatz des Satzes von Fubini (alle auftauchenden Funktionen sind nichtnegativ) eine untere Abschätzung herzuleiten:

$$\begin{aligned} \varrho_\varkappa^n &= \int \nu_\varkappa(d\overline{x}) \mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^\varkappa\right] = \iint \nu_\varkappa(d\overline{x}) \mathbf{P}^{\Pi_n}(dM) \|xM\|^\varkappa \\ &= \iint \nu_\varkappa(d\overline{x}) \frac{\|xM\|^\varkappa}{\|M\|^\varkappa} \|M\|^\varkappa \mathbf{P}^{\Pi_n}(dM) \qquad (7.2.5) \\ &\geq C \cdot \int \|M\|^\varkappa \mathbf{P}^{\Pi_n}(dM) = C \cdot \mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^\varkappa\right]. \qquad (7.2.6) \end{aligned}$$

Zusammen mit (7.2.4) liefert dies

$$\varrho_\varkappa = \lim_{n\to\infty} \left(\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^\varkappa\right]\right)^{\frac{1}{n}}. \qquad \square$$

7.4 Lemma

Unter den Voraussetzungen von Satz 7.2 und mit den Wahlen (von $\varrho_\varkappa$) wie im Beweis von Lemma 7.3 existiert für jedes $\varkappa \in [0, \varkappa_0]$ eine stetige Funktion $r_\varkappa : S^{d-1}_{\diagup\pm} \to (0, \infty)$, so dass für jedes $\overline{x} \in S^{d-1}_{\diagup\pm}$ gilt

$$\mathbf{E}\left[\|xM_1\|^\varkappa r(\overline{xM_1})\right] = \varrho_\varkappa r(\overline{x}).$$

Beweis.

1.SCHRITT : EXISTENZ EINES HÄUFUNGSPUNKTES

Wie zuvor wollen wir $r_\varkappa$ als Häufungspunkt (bzgl. der gleichmäßigen Konvergenz) von

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} r_{\varkappa,k}$$

wählen, wobei

$$r_{\varkappa,n} := \frac{T_\varkappa^n \mathbb{1}}{\varrho_\varkappa^n},$$

also

$$r_{\varkappa,n}(x) := \varrho_\varkappa^{-n}\mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^\varkappa\right].$$

Die Existenz eines Häufungspunktes folgt wie zuvor mit dem Satz von Arzelá-Ascoli. Dank der Dreiecksungleichung genügt es, die Beschränktheit und gleichgradige Stetigkeit für die Folge $(r_{\varkappa,n})_{n\geq 0}$ nachzuweisen.

Per definitionem ist $r_{\varkappa,n} \geq 0$, und aus (7.2.5) folgt

$$r_{\varkappa,n} \leq \frac{\mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^\varkappa\right]}{\varrho_\varkappa^n} \leq \frac{1}{C}$$

für alle $n \geq 0$. Die Folge ist somit beschränkt.

Für die gleichgradige Stetigkeit untersuche wiederum zwei Fälle: Zunächst sei $0 \leq \varkappa \leq 1$. Mittels Ungleichung (6) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \pm \|x\Pi_n\|^\varkappa - \|y\Pi_n\|^\varkappa &\leq \|x-y\|^\varkappa \|\Pi_n\|^\varkappa \\ \Rightarrow \quad \left|\mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^\varkappa\right] - \mathbf{E}\left[\|y\Pi_n\|^\varkappa\right]\right| &\leq \|x-y\|^\varkappa \mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^\varkappa\right] \leq \sqrt{2}^\varkappa\, d(\overline{x},\overline{y})^\varkappa \frac{\varrho_\varkappa^n}{C} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad |r_{\varkappa,n}(\overline{x}) - r_{\varkappa,n}(\overline{y})| \;=\; \left| \frac{\mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^{\varkappa}\right]}{\varrho_{\varkappa}^n} - \frac{\mathbf{E}\left[\|y\Pi_n\|^{\varkappa}\right]}{\varrho_{\varkappa}^n} \right| \;\leq\; \frac{\sqrt{2}^{\varkappa}}{C} d(\overline{x},\overline{y})^{\varkappa}.$$

Im Fall $\varkappa > 1$ folgt mit Ungleichung (7)

$$\begin{aligned}
& \pm \|x\Pi_n\|^{\varkappa} - \|y\Pi_n\|^{\varkappa} \;\leq\; \varkappa \|x-y\| \, \|\Pi_n\|^{\varkappa} \\
\Rightarrow \quad & |\mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^{\varkappa}\right] - \mathbf{E}\left[\|y\Pi_n\|^{\varkappa}\right]| \;\leq\; \varkappa \|x-y\| \, \mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\right] \;\leq\; \varkappa \sqrt{2}\, d(\overline{x},\overline{y}) \, \frac{\varrho_{\varkappa}^n}{C} \\
\Rightarrow \quad & |r_{\varkappa,n}(\overline{x}) - r_{\varkappa,n}(\overline{y})| \;\leq\; \varkappa \frac{\sqrt{2}}{C} \, d(\overline{x},\overline{y}),
\end{aligned}$$

insgesamt also die gleichmäßige Stetigkeit, da die rechte Seite jeweils unabhängig von n ist. Wir können $r_{\varkappa}$ also als Häufungspunkt wählen, und es folgt wie in Lemma 5.4, dass

$$T_{\varkappa} r_{\varkappa} = \varrho_{\varkappa} r_{\varkappa}.$$

2.Schritt : $r_{\varkappa}$ ist strikt positiv

In Lemma 5.3 konnten wir eine echt positive untere Schranke für die Folge $(r_{\varkappa,n})_{n\geq 0}$ angeben, diese haben wir hier nicht zur Verfügung, wir wissen nur, dass $r_{\varkappa} \geq 0$. Also müssen wir auf anderem Wege zeigen, dass unser soeben gewähltes $r_{\varkappa}$ strikt positiv ist.

Zunächst einmal folgt aus

$$\int \nu_{\varkappa}(d\overline{x}) r_{\varkappa,n}(\overline{x}) = \varrho_{\varkappa}^{-1} \int \nu_{\varkappa}(d\overline{x}) \mathbf{E}\left[\|x\Pi_n\|^{\varkappa}\right] = 1$$

und dem Satz von der majorisierten Konvergenz, dass $\int \nu_{\varkappa}(d\overline{x}) r_{\varkappa}(\overline{x}) = 1$. Somit ist $r_{\varkappa}$ nicht identisch 0. Insbesondere gibt es also, da $r_{\varkappa}$ stetig ist, eine offene Menge $\overline{U} \in S^{d-1}_{/\pm}$, auf der $r_{\varkappa}$ strikt positiv ist.

Annahme: Es gibt ein $\overline{x_0} \in S^{d-1}_{/\pm}$ mit $r(\overline{x_0}) = 0$.

Da $r_{\varkappa}$ Eigenfunktion von $T_{\varkappa}$ ist, folgt daraus bereits

$$0 = T_{\varkappa}^n r_{\varkappa}(\overline{x_0}) = \mathbf{E}\left[\|x_0\Pi_n\|^{\varkappa} r_{\varkappa}(\overline{x_0\Pi_n})\right],$$

insbesondere also $\mathbf{E}\left[r_{\varkappa}(\overline{x_0\Pi_n})\right] = 0$. Nach Voraussetzung gibt es aber zu x_0 und dem oben gewählten $U = p^{-1}(\overline{U})$ ein $n \geq 0$ mit $\mathbf{P}\left((x_0\Pi_n)^{\sim} \in U\right) > 0$. Dann erhalten wir aber einen Widerspruch durch

$$\mathbf{E}\left[\|x_0\Pi_n\|^{\varkappa} r_{\varkappa}(\overline{x_0\Pi_n})\right] \geq \int_U \|y\|^{\varkappa} r_{\varkappa}(\overline{y}) \mathbf{P}^{x_0\Pi_n}(dy) > 0. \qquad \square$$

7.3. Negativer Ljapunov-Exponent

Nun sind wir bereit, den letzten Satz dieser Arbeit zu beweisen, der das Analogon zu Satz 5.8 für den Fall regulärer Matrizen bildet:

7.5 Satz
Es sei $(M_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von unter $\mathbf{P}$ unabhängig identisch verteilten Zufallsmatrizen. Es gelte:

1. $\mathbf{P}(M_1 \text{ ist regulär}) = 1$.

2. *Es gebe ein $n > 0$, ein $c > 0$, eine Matrix $M_0 \in GL(d, \mathbb{R})$ und ein $\gamma_0 > 0$, so dass $\mathbf{P}^{\Pi_n}$ auf $B_c(M_0)$ eine Komponente mit Lebesgue-Dichte größer gleich γ_0 besitzt.*

3. *Es gebe eine zulässige Matrix.*

4. *Für jedes $x \in S^{d-1}$ und jede offene Menge $U \subset S^{d-1}$ existiere ein $n \geq 1$ mit $\mathbf{P}\left(x\Pi_n \in U\right) > 0$.*

Es existiere ein $\varkappa_0 > 0$, so dass gelte

5. $\mathbf{E}\left[\|M_1\|^{\varkappa_0} \log^+ \|M_1\|\right] < \infty$,

6. $\mathbf{E}\left[\lambda(M_1)^{\varkappa_0}\right] \geq 1$, *wobei $\lambda(M_1)$ den kleinsten Eigenwert von $(M_1 M_1^t)^{\frac{1}{2}}$ bezeichne.*

Es gebe ein $\beta \in (-\infty, 0)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \|M_1 \cdots M_n\| = \beta \quad \mathbf{P}\text{-}f.s.$$

Dann besitzt die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{E}\left[\|\Pi_n\|^{\varkappa}\right] = 0$$

auf dem Intervall $(0, \varkappa_0]$ eine eindeutige Lösung $\varkappa_1$.

Es existiert eine stetige Funktion $r : S^{d-1}_{/\pm} \to (0, \infty)$ und ein W-Maß π auf $S^{d-1}_{/\pm}$, sowie eine π-Nullmenge $\overline{N}$, so dass für alle $\overline{x} \notin \overline{N}$ und jede stetige und beschränkte Funktion $g : S^{d-1}_{/\pm} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} e^{\varkappa_1 t} \cdot \mathbf{E}\left[g\left(\overline{Z}_{\overline{x}}(t), R_{\overline{x}}(t)\right) \mathbb{1}_{\{\tau_{\overline{x}}(t)<\infty\}}\right] = K(g) r(\overline{x})$$

für eine von x unabhängige Konstante $K(g)$. Für positive Funktionen g ist $K(g)$ ebenfalls strikt positiv.

Insbesondere gibt es ein $K > 0$, so dass für alle $x \in S^{d-1}$ mit $\overline{x} \notin \overline{N}$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} t^{\varkappa_1} \mathbf{P}\left(\sup_{n\geq 1} \|xM_1 \cdots M_n\| > t\right) = K \cdot r(\overline{x}).$$

Beweis. Satz 7.2 stellt die Existenz von Eigenfunktionen $r_\varkappa$ zum Eigenwert $\varrho_\varkappa$ für jedes $\varkappa \in [0, \varkappa_0]$ sicher. Lemma 5.5 zusammen mit der anschließenden Bemerkung liefern die Existenz eines eindeutigen $\varkappa_1$ mit $\varrho_{\varkappa_1} = 1$. Dieses ist damit auch die eindeutige Lösung der obigen Gleichung. Also ist $(r := r_{\varkappa_1}, \varkappa_1)$ ein maßdefinierendes Paar.

In dem damit definierten Modell $\mathfrak{M}_\pm$ sind $(X_n)_{n\geq 0}$ und $(X_n, U_{n+1})_{n\geq 0}$ positiv Harris-rekurrent, wie wir in Satz 6.8 bzw. Bemerkung 6.10 gezeigt haben, es existiert also eine eindeutige stationäre Verteilung π für $(X_n)_{n\geq 0}$. Insbesondere gilt (vgl. den Beweis von Satz 6.12) die Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} = \mathbb{E}_\pi [V_1] =: \alpha \quad \mathbb{P}\text{-}f.s.$$

für ein $\alpha \in [-\infty, \infty)$. Lemma 5.7, dessen Beweis sich problemlos übernehmen lässt, liefert uns schließlich, dass unter den gegebenen Voraussetzungen (insbesondere wegen $\beta < 0$) gilt, dass $\alpha > 0$.

Da der MRW nach Lemma 6.11 nichtarithmetisch ist, sind die Voraussetzungen des Markov-Erneuerungstheorems 1.20 erfüllt, und wir erhalten genau wie im Beweis von 5.8 die behaupteten Aussagen. Die Einschränkung auf π-fast alle $\overline{x} \in S^{d-1}_{/\pm}$ ist der entsprechenden Einschränkung im Markov-Erneuerungstheorem geschuldet. $\square$

Ausblick

Die Zukunft ... das unentdeckte Land [1]

An die Ergebnisse dieser Arbeit schließen sich viele interessante Fragestellungen an:

- Kesten [11] nutzte die hier gezeigten Resultate zur Untersuchung von stochastischen Fixpunktgleichungen der Form

  $$Y \sim MY + Q,$$

  wobei M eine zufällige Matrix und Q ein zufälliger Vektor ist, deren Verteilungen bestimmten Bedingungen genügen mögen.

  Eine Lösung dieser Gleichung ist durch

  $$Y = \sum_{k=1}^{\infty} M_1 \cdots M_{k-1} Q_k$$

  gegeben, wobei $(M_n)_{n \geq 1}$ und $(Q_n)_{n \geq 1}$ (auch untereinander) unabhängig identisch verteilte Kopien von M bzw. Q darstellen, sofern der Ljapunov-Exponent

  $$\alpha = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \|M_1 \cdots M_n\|$$

  negativ ist. Kesten zeigt, dass sich die Tailwahrscheinlichkeiten von Y,

  $$\mathbf{P}\left(Y > t\right),$$

  für große t verhalten wie

  $$\mathbf{P}\left(\sup_{n \geq 1} \|M_1 \cdots M_n\| > t\right).$$

[1] Kanzler Gorkon in Star Trek VI.

Mit den in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnissen kann er somit folgern, dass Y im Anziehungsbereich einer stabilen Verteilung liegt.

- Auch im Fall positiver Matrizen kann die Harris-Rekurrenz der Steuerkette gezeigt werden, sofern wie im regulären Fall die Existenz einer $\lambda\!\!\lambda$-stetigen Komponente vorausgesetzt wird. Dies ersetzt die umfangreichen, in Kapitel 3 durchgeführten Rechnungen, durch die in Kapitel 6 durchgeführten. Allerdings kann, will man Konvergenzraten beweisen, auf keine der in Satz 4.3 genannten Voraussetzungen verzichtet werden, da diese allesamt auch für die Existenz eines maßdefinierenden Paares $(r, \varkappa)$ notwendig sind.

- Allerdings erhalten wir dann die Aussagen nur noch für π-fast alle $x \in S$, statt für alle $x \in S$, da wir die zweite Version des Markov-Erneuerungstheorems nutzen. Dies wirft die Frage auf, unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen dort auf diese Einschränkung verzichtet werden kann.

A. Anhang

A.1. Häufig benötigte Ungleichungen

(1) Für beliebige Vektoren $x, y \neq 0$ gilt $\|\tilde{x} - \tilde{y}\| \leq \frac{2}{\|x\|} \|x - y\|$:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{x} - \tilde{y}\| &= \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \\
&= \frac{1}{\|x\| \cdot \|y\|} \Big\| x \|y\| - y \|x\| \Big\| \\
&= \frac{1}{\|x\| \cdot \|y\|} \Big\| x \|y\| - y \|y\| + y \|y\| - y \|x\| \Big\| \\
&\leq \frac{1}{\|x\| \cdot \|y\|} \Big(\|y\| \cdot \|x - y\| + \|y\| \cdot \big| \|y\| - \|x\| \big| \Big) \\
&\leq \frac{2}{\|x\|} \|x - y\| .
\end{aligned}$$

(2) Für $x \in S_+$ gilt $\sum_{i=1}^d x_i \geq \|x\|$:

Da $x \geq 0$, ist auch $(\sum_{i=1}^d x_i)^2 \geq \sum_{i=1}^d x_i^2$. Wurzelziehen liefert die Behauptung, da $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2} = 1$. Insbesondere ist auch $\sum_{i=1}^d x_i \geq 1$.

(3) Für bel. Matrizen M gilt $\|M\| \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^d (M(i,j))^2}$:

Sei $x \in S^{d-1}$ ein beliebiger Vektor. Dann gilt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, dass $(\sum_{i=1}^d x_i M(i,j))^2 = \langle x, M(\cdot, j)^t \rangle^2 \leq \|x\|^2 (\sum_{i=1}^d M(i,j)^2)$ für alle $1 \leq j \leq d$. Daraus folgt sofort

$$\|M\| = \sup_{x \in S^{d-1}} \sqrt{\sum_{j=1}^d \left(\sum_{i=1}^d x_i M(i,j) \right)^2} \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^d (M(i,j))^2}.$$

(4) Für nichtnegative Matrizen folgt mit (2) direkt $\|M\| \leq \sum_{i,j=1}^d M(i,j)$.

(5) Für alle $x \in \mathbb{R}^d$ ist $\|x\| \geq d^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^d x_i$:

Nach der Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel ist

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^d x_i^2}{d}} \geq \frac{\sum_{i=1}^d x_i}{d};$$

multipliziere mit $d^{\frac{1}{2}}$.

(6) Für $\varkappa \in (0,1)$ und reelle Zahlen α, β gilt $\Big||\alpha|^\varkappa - |\beta|^\varkappa\Big| \leq |\alpha - \beta|^\varkappa$:

Die Funktion $t \mapsto \varkappa t^{\varkappa-1}$ ist monoton fallend auf $(0,\infty)$, deshalb gilt

$$\Big|\int\limits_0^{|\alpha|} \varkappa t^{\varkappa-1}dt - \int\limits_0^{|\beta|} \varkappa t^{\varkappa-1}dt\Big| = \int\limits_{\min\{|\alpha|,|\beta|\}}^{\min\{|\alpha|,|\beta|\}+|\alpha-\beta|} \varkappa t^{\varkappa-1}dt \leq \int\limits_0^{|\alpha-\beta|} \varkappa t^{\varkappa-1}dt = |\alpha-\beta|^\varkappa.$$

(7) Für $\varkappa \geq 1$ und reelle Zahlen α, β gilt $\Big||\alpha|^\varkappa - |\beta|^\varkappa\Big| \leq |\alpha-\beta| \cdot \varkappa \cdot \max\{|\alpha|^{\varkappa-1}, |\beta|^{\varkappa-1}.\}$:

Beachtet man, dass die Funktion $t \mapsto \varkappa t^{\varkappa-1}$ nun monoton wachsend ist, so erhalten wir

$$\Big|\int\limits_0^{|\alpha|} \varkappa t^{\varkappa-1}dt - \int\limits_0^{|\beta|} \varkappa t^{\varkappa-1}dt\Big| = \int\limits_{\max\{|\alpha|,|\beta|\}-|\alpha-\beta|}^{\max\{|\alpha|,|\beta|\}} \varkappa t^{\varkappa-1}dt \leq |\alpha-\beta| \cdot \varkappa \cdot \max\{|\alpha|^{\varkappa-1}, |\beta|^{\varkappa-1}\}$$

A.2. Schwache Konvergenz und die schwache Feller-Eigenschaft

Für einen topologischen Raum S bezeichnet $\mathcal{C}_b(S)$ die Menge der stetigen, beschränkten Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$.
Im Folgenden sei S stets ein separabler metrischer Raum. Auf metrischen Räumen bezeichnen wir die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra als die Borelsche σ-Algebra.

A.1 Definition (Schwache Konvergenz auf metrischen Räumen)
Sei S ein metrischer Raum mit Borelscher σ-Algebra $\mathcal{S}$; μ_n, $n \geq 1$ und μ endliche Maße auf S. Dann heißt $(\mu_n)_{n\geq 1}$ *schwach konvergent* gegen μ (kurz $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$), wenn für alle $f \in \mathcal{C}_b(S)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_S f d\mu_n = \int\limits_S f d\mu.$$

A.2 Satz (Eindeutigkeitssatz)
Sind μ, ν zwei endliche Maße auf S, so dass

$$\int_S f d\mu = \int_S f d\nu$$

für alle $f \in \mathcal{C}_b(S)$, so gilt $\mu = \nu$.

Beweis. siehe [8], VIII.4.6 . □

A.3 Satz (Portmanteau-Theorem)
Sei S ein metrischer Raum mit Borelscher σ-Algbra; μ_n, $n \geq 1$, und μ endliche Maße auf S. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $\mu_n \stackrel{w}{\to} \mu$.

(b) Es ist $\lim_{n\to\infty} \mu_n(S) = \mu(S)$, *und für jede abgeschlossene Menge $A \subset S$ gilt*

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(A) \leq \mu(A).$$

(c) Es ist $\lim_{n\to\infty} \mu_n(S) = \mu(S)$, *und für jede offene Menge $U \subset S$ gilt*

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(U) \geq \mu(U).$$

Beweis. siehe [8], VIII.4.10 . □

A.4 Definition (Straffheit einer Maßfolge)
Sei S ein metrischer Raum mit Borelscher σ-Algbra, $(\mu_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Maßen auf S. Die Folge heißt *straff*, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset S$ existiert, so dass für alle $n \geq 1$

$$\mu_n(K^c) < \varepsilon.$$

A.5 Satz (Satz von Prochorov)
Ist S ein metrischer Raum, so ist jede straffe und beschränkte Menge von Maßen auf S schwach relativ folgenkompakt.

Beweis. siehe [8], VIII.4.22 . □

A.6 Definition (Schwache Feller-Eigenschaft)

Ein Übergangskern $P : S \times \mathcal{S} \to [0,1]$ wirkt auf $\mathcal{C}_b(S)$ vermittels

$$P f(x) := \int_S P(x, dy) f(y)$$

für alle $x \in S$. Wir sagen, dass P die *schwache Feller-Eigenschaft* besitzt, falls

$$f \in \mathcal{C}_b(S) \;\Rightarrow P f \in \mathcal{C}_b(S).$$

A.7 Satz (Existenz einer stationären Verteilung)
Sei S ein kompakter metrischer Raum mit Borelscher σ-Algebra $\mathcal{S}$, $P : S \times \mathcal{S} \to [0,1]$ ein Markovkern, der die schwache Feller-Eigenschaft erfüllt. Dann ist für jedes $y \in S$ die Folge der Okkupationsmaße

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P^i(y, \cdot)$$

schwach relativ folgenkompakt, und jeder Häufungspunkt ist ein invariantes W-Maß für P.

Beweis. S ist nach Voraussetzung kompakt, also ist jede Folge von Maßen auf S straff (wähle $K = S$). Für jedes $y_0 \in S$ und $n \geq 1$ ist

$$\varphi_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P^i(y_0, \cdot) \tag{A.2.1}$$

ein W-Maß, insbesondere ist die Folge $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ beschränkt. Somit ist sie nach dem Satz von Prochorov A.5 schwach relativ folgenkompakt.

Sei nun $y_0 \in S$ beliebig und $(\varphi_{n_k})_{k \geq 1}$ eine schwach konvergente Teilfolge von (A.2.1) mit Limes φ. Dann ist φ wieder ein W-Maß. Um zu zeigen, dass φ stationär für P ist, genügt es nach dem Eindeutigkeitssatz A.2

$$\int_S \int_S f(y) P(x, dy) \varphi(dx) = \int_S f(y) \varphi(dy)$$

für alle $f \in \mathcal{C}_b(S)$ nachzuweisen. Nach Voraussetzung besitzt P die schwache Feller-Eigenschaft, für $f \in \mathcal{C}_b(S)$ ist dann auch $P f \in \mathcal{C}_b(S)$ und somit eine Testfunktion für die schwache Konvergenz. Beachtet man noch, dass $\int_S f(y) P^n(y_0, dy) \leq \|f\|_\infty < \infty$ für alle $n \geq 1$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\int_S \int_S f(y)\; P(x,dy)\varphi(dx) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_S \int_S f(y)\; P(x,dy) \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} P^i(y_0,dx) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_S \int_S f(y)\; P(x,dy) \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} \int_{S^{i-1}} \cdots \int P(y_0,dy_1)\ldots P(y_{i-1},dx) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_S f(y)\; \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} \int_{S^i} \cdots \int P(y_0,dy_1)\ldots P(y_{i-1},dx)P(x,dy) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_S f(y)\; \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} P^{i+1}(y_0,dy) \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\int_S \left(f(y)\, \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} P^i(y_0,dy) \right) + \frac{1}{n_k} \int_S f(y)\, P^{n_k+1}(y_0,dy) - \frac{1}{n_k} \int_S f(y)\, P(y_0,dy) \right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_S f(y)\; \varphi_{n_k}(dy) \\
&= \int_S f(y)\, \varphi(dy).
\end{aligned}$$

□

A.3. Sätze aus der Funktionalanalysis

Sei X ein normierter (und also topologischer) Vektorraum. Der Vektorraum der stetigen Linearformen $x' : X \to \mathbb{R}$ heißt der *Dualraum* von X und wird mit X' bezeichnet. Mit der Norm $\|x'\| := \sup_{\|x\|\leq 1} |x'(x)|$ ist er stets ein Banachraum (vgl. [18], II.2).
Auf X' kann eine weitere Topologie definiert werden: Definiere für jedes $x \in X$ eine Halbnorm auf X' durch

$$p_x(x') := |x'(x)|.$$

Diese Familie erzeugt eine lokalkonvexe Topologie auf X', die als schwach*-Topologie bezeichnet wird. X', versehen mit dieser Topologie, ist ein lokalkonvexer (topologischer) Vektorraum. Eine Folge $(x'_n)_{n\geq 0} \subset X'$ ist konvergent in dieser Topologie (mit dem Grenzwert x'), falls

$$\lim_{n\to\infty} x'_n(x) = x'(x) \tag{A.3.1}$$

für alle $x \in X$ gilt. (Die Details finden sich in [18], VIII.1 & Beispiel (h)).

A.8 Satz (**Satz von Alaoglu**)
Sei X ein normierter Raum, X' der zugehörige Dualraum. Dann ist

$$B := \{x' \in X' \ : \ \|x'\| \leq 1\}$$

kompakt in der schwach-Topologie.*

Beweis. siehe [18], VIII.3.12. □

A.9 Satz (**Satz von Schauder-Tychonoff**)
Sei A eine kompakte konvexe Teilmenge eines lokalkonvexen Vektorraums. Dann besitzt jede (bzgl. der lokalkonvexen Topologie) stetige Abbildung $T \ : \ A \to A$ einen Fixpunkt.

Beweis. siehe [7], V.10.5. □

Sei $T : X \to Y$ eine Abbildung zwischen normierten Räumen. Die *adjungierte Abbildung* $T' : Y' \to X'$ ist die durch

$$(T'y')(x) := y'(Tx)$$

definierte Abbildung. T' ist wohldefiniert und stetig (vgl. [18], III.4).

Sei S ein kompakter Hausdorff-Raum mit Borelscher σ-Algebra $\mathcal{S}$. Ein Maß ν auf S heißt regulär, falls für alle $A \in \mathcal{S}$ und $\varepsilon > 0$ ein Kompaktum K und eine offene Menge U existieren, so dass $K \subset A \subset U$, und $\nu(U \backslash K) < \varepsilon$. D.h. jede meßbare Menge kann von innen durch kompakte Mengen, und von außen durch offene Mengen approximiert werden, und das äußere und das innere Maß konvergieren gegeneinander. Ein signiertes Maß ν heißt regulär, falls ν^+, ν^- regulär sind. Mit $\mathbf{M}_{reg}(\mathcal{S})$ bezeichnen wir die Menge der signierten regulären endlichen Maße $\nu : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$. Versehen mit der Totalvariationsnorm $\|\nu\| := \nu^+(S) + \nu^-(S)$ ist $\mathbf{M}_{reg}(\mathcal{S})$ ein normierter Raum.

A.10 Satz (Darstellungssatz von Riesz)
Sei S ein kompakter Hausdorffraum. Dann ist

$$\Phi \ : \ \mathbf{M}_{reg}(\mathcal{S}) \to C_b'(S),$$
$$\Phi(\nu)(f) := \int_S f d\nu$$

ein ordnungstreuer isometrischer Isomorphismus.

Beweis. siehe [18], Satz II.2.5. □

Wir können den Dualraum zu $C_b'(S)$ also als $\mathbf{M}_{reg}(\mathcal{S})$ darstellen. Die Dualraumnorm $\|\nu\| := \sup_{\|f\|\leq 1} |\int f d\nu|$ *ist* die Totalvariation (wähle $f = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A^c}$ mit $\nu^+(A^c) = \nu^-(A) = 0$; dies ist möglich nach dem Hahnschen Zerlegungssatz ([8],VII.1.8)).
Eine Folge von Maßen ist konvergent in der schwach*-Topologie, wenn sie im herkömmlichen Sinne schwach konvergent ist, denn (A.3.1) wird zu

$$\lim_{n\to\infty} \int f d\nu_n = \int f d\nu$$

für alle $f \in C_b(S)$. Der Satz von Alaoglu besagt also, dass

$$\mathbf{M}^1_{reg}(\mathcal{S}) := \{\nu \ : \ \|\nu\| \leq 1\}$$

kompakt in der schwach*-Topologie ist, und damit insbesondere auch die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathfrak{W}$ auf S. Da $\mathfrak{W}$ weiterhin konvex ist, erhalten wir aus dem Satz von Schauder-Tychonoff nun:

A.11 Korollar
Sei S ein kompakter Hausdorff-Raum mit Borelscher σ-Algebra, $\mathfrak{W}$ bezeichne die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf S. Jede bzgl. der schwachen Konvergenz stetige Abbildung $T : \mathfrak{W} \to \mathfrak{W}$ besitzt einen Fixpunkt.

Die adjungierte Abbildung sieht nun wie folgt aus:

A.12 Korollar
Sei S ein kompakter Hausdorffraum, $T : C_b(S) \to C_b(S)$ eine stetige lineare Abbildung. Die adjungierte Abbildung $T' : \mathbf{M}_{reg}(\mathcal{S}) \to \mathbf{M}_{reg}(\mathcal{S})$ ist dann gegeben durch

$$\int (T'\nu)(dx) f(x) = \int \nu(dx)(Tf)(x) \quad \forall f \in C_b(S).$$

A.13 Satz (**Satz von Arzelà-Ascoli**)
Sei (S,d) ein kompakter metrischer Raum, und sei $M \subset C_b(S)$. Die Teilmenge M sei beschränkt und gleichgradig stetig, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in S\ \exists \delta > 0\ \forall f \in M\ \forall y \in S \quad d(x,y) \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \delta.$$

Dann ist $\overline{M}$ (folgen-)kompakt.

Beweis. siehe [7], Satz IV.6.7. □

A.4. Sätze aus der Wahrscheinlichkeitstheorie

A.14 Definition
Sei $(X_n)_{n\geq 0}\ :\ (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$ ein stationärer Prozess. Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt invariant, falls ein $B \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ existiert, so dass

$$A = \{(X_n, X_{n+1}, \dots) \in B\}$$

für alle $n \geq 0$.

A.15 Satz (**Birkhoff'scher Ergodensatz**)
Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ ein (unter $\mathbb{P}$) stationärer Prozess und $\mathbb{E}\left[|X_1|\right] < \infty$. Dann gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to \mathbb{E}\left[X_1|\mathcal{J}\right] \quad \mathbb{P}\text{-}f.s. \text{ und in } L_1(\mathbb{P}),$$

wobei $\mathcal{J}$ die σ-Algebra der invarianten Mengen bezeichnet.

Beweis. siehe [6], Theorem 6.28. □

A.5. Ergänzungen

Beweis von Lemma 1.8

A.16 Lemma
Sei $C_0 = \emptyset$, und für $k \geq 1$

$$C_k = \left\{ x \in S\ :\ \mathbb{P}_x\left(\frac{V_m}{m} \geq \frac{1}{k} \text{ für alle } m \geq k\right) \geq \frac{1}{2}\right\}.$$

Es seien $x \in S$, $t \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^+$ und $k \geq 0$ beliebig. Dann gilt

$$U_x(C_k \times [t, t+b]) = E_x \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n \in C_k, V_n \in [t,t+b]\}} \leq 2(k+1+kb). \tag{A.5.1}$$

Beweis. Definiere die Erst- bzw. Wiedereintrittszeiten

$$\begin{aligned}
\tau_0 &:= \inf\{n \geq 0 \ : \ X_n \in C_k,\ V_n \in [t, t+b]\}, \\
\tau_{i+1} &:= \inf\{\tau_i + m \ : \ m > k,\ X_{\tau_i+m} \in C_k,\ V_{\tau_i+m} \in [t, t+b],\ V_{\tau_i+m} - V_{\tau_i} < mk^{-1}\}.
\end{aligned}$$

Ist $m > kb$, so folgt aus $V_{\tau_i+m} \in [t, t+b]$ stets

$$V_{\tau_i+m} - V_{\tau_i} \leq b < mk^{-1},$$

die letzte Bedingung stellt also keine Einschränkung mehr dar.
Somit kann $(X_n, V_n) \in C_k \times [t, t+b]$ für höchstens $(k+1+kb)$ Werte von n zwischen τ_i und τ_{i+1} gelten. Also

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n \in C_k,\ V_n \in [t,t+b]\}} \\
\leq\ & \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\tau_j < \infty\}} \sum_{n=\tau_j}^{\tau_{j+1}-1} \mathbb{1}_{\{X_n \in C_k,\ V_n \in [t,t+b]\}} \\
\leq\ & \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\tau_j < \infty\}} (k+1+kb).
\end{aligned} \tag{A.5.2}$$

Induktiv zeigen wir nun $\mathbb{P}_x(\tau_i < \infty) \leq \frac{1}{2}^i$ für alle $i \geq 0$. Der Induktionsanfang ist trivial; im Induktionsschritt schätzen wir zunächst die bedingte Wahrscheinlichkeit ab:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_x(\tau_{i+1} < \infty \mid \mathcal{F}_{\tau_i}) \\
=\ & \mathbb{P}_x(\tau_{i+1} < \infty, \tau_i < \infty, \ldots, \tau_0 < \infty \mid \mathcal{F}_{\tau_i}) \\
=\ & \mathbb{P}_x(\tau_{i+1} < \infty \mid \mathcal{F}_{\tau_i}) \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_i < \infty, \ldots, \tau_0 < \infty\}} \\
\leq\ & \mathbb{P}_x\left(\exists\, m > k \text{ mit } V_{\tau_i+m} - V_{\tau_i} < mk^{-1} \mid \mathcal{F}_{\tau_i}\right) \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_i < \infty, \ldots, \tau_0 < \infty\}} \\
\leq\ & \left(1 - \mathbb{P}_x\left(V_{\tau_i+m} - V_{\tau_i} \geq mk^{-1} \ \ \forall\, m \geq k \mid \mathcal{F}_{\tau_i}\right)\right) \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_i < \infty, \ldots, \tau_0 < \infty\}} \\
=\ & \Big(1 - \mathbb{P}_{X_{\tau_i}}\left(V_m \geq mk^{-1} \ \ \forall\, m \geq k\right)\Big) \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_i < \infty, \ldots, \tau_0 < \infty\}} \\
\leq\ & \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_i < \infty, \ldots, \tau_0 < \infty\}}.
\end{aligned}$$

Dabei wurde in der vorletzten Zeile die starke Markov-Eigenschaft von (X_n, V_n) benutzt, und in der letzten Zeile, dass $X_{\tau_i} \in C_k$ auf $\{\tau_i < \infty, \ldots, \tau_0 < \infty\}$.
Mit der Induktionsvoraussetzung

$$\mathbb{P}_x(\tau_i < \infty, \ldots, \tau_0 < \infty) = \mathbb{P}_x(\tau_i < \infty) \leq \frac{1}{2}^i$$

folgt nun

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_x(\tau_{i+1} < \infty) \\
= \ & \mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}_x(\tau_{i+1} < \infty, \tau_i < \infty, \ldots, \tau_0 < \infty \mid \mathcal{F}_{\tau_i})\right] \\
\leq \ & \mathbb{E}_x\left[\frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_i < \infty, \ldots, \tau_0 < \infty\}}\right] \\
= \ & \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}_x(\tau_i < \infty, \cdots, \tau_0 < \infty) \\
\overset{IV}{\leq} \ & \frac{1}{2}^{i+1}.
\end{aligned}$$

Mit (A.5.2) folgt nun die Behauptung:

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n \in C_k,\ V_n \in [t, t+b]\}}\right] \leq \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(\{\tau_j < \infty\})(k+1+kb) \leq 2(k+1+kb). \quad \square$$

Beispiel für einen schwach nichtarithmetischen, aber 1-arithmetischen MRW

Sei $S = \{1, 2, 3\}$, $(X_n)_{n \geq 0}$ eine diskrete Markov-Kette auf S mit Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Verteilung von $(V_n)_{n \geq 0}$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V_1 \in \cdot \mid X_1 = 1, X_0 = 2) &\sim B(1, \frac{1}{2}) \\
\mathbb{P}(V_1 - e \in \cdot \mid X_1 = 1, X_0 = 3) &\sim B(1, \frac{1}{2}) \\
\mathbb{P}(V_1 \in \cdot \mid X_1 = 2, X_0 = 1) &\sim B(1, \frac{1}{2}) \\
\mathbb{P}(V_1 - e \in \cdot \mid X_1 = 3, X_0 = 1) &\sim B(1, \frac{1}{2}).
\end{aligned}$$

Wähle $\gamma(3) = e, \gamma(1) = \gamma(2) = 0$. Dann ist $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ (bzgl. $\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$) 1-arithmetisch. Jedoch ist

$$\mathbb{P}_1 (X_3 = 1, V_3 = 1) = \mathbb{P}_1 (X_3 = 1, V_3 = 0) = \mathbb{P}_1 (X_3 = 1, V_3 = e) = \frac{1}{4},$$

und somit $(X_n, V_n)_{n\geq 0}$ schwach nichtarithmetisch.

Literaturverzeichnis

[1] ALSMEYER, Gerold: *Erneuerungstheorie : Analyse stochastischer Regenerationsschemata.* B.G. Teubner Stuttgart, 1991

[2] ALSMEYER, Gerold: The Markov renewal theorem and related results. In: *Markov Proc. Rel. Fields* 3 (1997), S. 103–127

[3] ALSMEYER, Gerold: *Stochastische Prozesse, Teil 1.* 3. Auflage. Institut für Mathematische Statistik, Fachbereich Mathematik der WWU Münster, 2005 (Skripten zur Mathematischen Statistik, Nr. 33)

[4] ALSMEYER, Gerold: *Wahrscheinlichkeitstheorie.* 4. Auflage. Institut für Mathematische Statistik, Fachbereich Mathematik der WWU Münster, 2005 (Skripten zur Mathematischen Statistik, Nr. 30)

[5] BOUGEROL, Philippe ; LACROIX, Jean: *Products of Random Matrices with Applications to Schrödinger Operators.* Birkhäuser Boston, 1985

[6] BREIMAN, Leo: *Probability.* Addison-Wesley, 1968

[7] DUNFORD, Nelson ; SCHWARTZ, Jacob T.: *Linear Operators, Part I, General Theory.* Wiley, 1958

[8] ELSTRODT, Jürgen: *Maß- und Integrationstheorie.* 5. Auflage. Springer, Berlin Heidelberg, 2007

[9] FURSTENBERG, Harry ; KESTEN, Harry: Products of random matrices. In: *Ann. Math. Statist.* 31 (1960), S. 457–469

[10] HEUSER, Harro: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1.* 15. Auflage. Teubner, 2006

[11] KESTEN, Harry: Random difference equations and renewal theory for products of random matrices. In: *Acta Mathematica* 131 (1973), S. 207–248

[12] KESTEN, Harry: Renewal Theory for Functionals of a Markov Chain with general state space. In: *The Annals of Probability* 2 (1974), Nr. 3, S. 355–386

[13] KLÜPPELBERG, Claudia ; PERGAMENCHTCHIKOV, Serguei: Renewal theory for functionals of a Markov Chain with compact state space. In: *Annals of Probability* 31 (2003), Nr. 4, S. 2270–2300

[14] KLÜPPELBERG, Claudia ; PERGAMENCHTCHIKOV, Serguei: The tail of the stationary distribution of a random coefficient AR(q) model. In: *Annals of Applied Probability* 14 (2004), Nr. 2, S. 971–1005

[15] LE PAGE, Émile: Théorèmes de renouvellement pour les produits de matrices aléatoires. In: *Séminaires de probabilités Rennes. Publication des Séminaires de Mathématiques, Univ. Rennes I* (1983), S.

[16] MEYN, Sean P. ; TWEEDIE, Richard L.: *Markov Chains and Stochastic Stability.* Springer, New York, 1993

[17] NIEMI, S. ; NUMMELIN, E.: On non-singular renewal kernels with an application to a semigroup of transition kernels. In: *Stochastic Processes and their Applications* 22 (1986), S. 177–202

[18] WERNER, Dirk: *Funktionalanalysis.* 6., korr. Auflage. Springer, Berlin Heidelberg, 2007

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt und keine anderen als die im Literaturverzeichnis aufgeführten Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Münster, den 4. September 2009.

Sebastian Mentemeier