Übungen

Abgabetermin: Dienstag, 26.06.2007, 10:15 Uhr

Aufgabe 31. (5 Punkte)
Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \mathrm{Exp}(1))$, $\alpha > 0$ und

$$A_\alpha := \{x \in \Omega \ : \ \forall k \in \mathbb{N} \exists n \geq k : x_n \geq \alpha \log n\}.$$

Zeigen Sie, dass $A_\alpha \in \mathfrak{A}$ gilt und bestimmen Sie $\mathbb{P}(A_\alpha)$.

Aufgabe 32. (5 Punkte)

a) Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{A}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$, falls $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A \cap A_n) = \infty$ gilt für alle $A \in \mathfrak{A}$ mit $P(A) > 0$.

b) Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{A}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(\limsup A_n) \leq 1 - P(A)$ gilt für alle $A \in \mathfrak{A}$ mit $\sum_{n=1}^\infty P(A \cap A_n) < \infty$.

Aufgabe 33. (5 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen, mit Partialsummenfolge $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge Borel-messbarer Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Hewitt und Savage:

$$\mathbb{P}(S_n \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}) \in \{0, 1\}.$$

Aufgabe 34. (5 Punkte)
Beweisen Sie mit Hilfe des Lemmas von Borel und Cantelli folgende Version des starken Gesetzes der großen Zahlen: Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsgrößen, so dass $\mathbb{E}X_n^4 < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und existiert ein $K \in \mathbb{R}$ mit

$$\mathbb{E}\left(X_n - \mathbb{E}X_n\right)^4 < K \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

dann gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^4 = \sum_{i=1}^n a_i^4 + 6\sum_{i<j} a_i^2 a_j^2 + 12 \sum_{i\neq j, i\neq k, j<k} a_i^2 a_j a_k + 24 \sum_{i<j<k<l} a_i a_j a_k a_l + 4\sum_{i\neq j} a_i^3 a_j.$$