Übungen

Abgabetermin: Dienstag, 19.06.2007, 10:15 Uhr

Aufgabe 27. (5 Punkte)
Seien X, Y und Z Zufallsgrößen. Die Notation $X \perp Y$ stehe abkürzend für X und Y sind stochastisch unabhängig. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $X \perp Y \Longleftrightarrow X^2 \perp Y^2$.

b) $X \perp Y, X \perp Z \Longleftrightarrow X \perp (Y, Z)$.

c) $X \perp Y, Y \perp Z \Longrightarrow X \perp Z$.

d) $X \perp (Y, Z), Y \perp Z \Longleftrightarrow X, Y$ und Z sind stochastisch unabhängig.

Aufgabe 28. (5 Punkte)
Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger, reellwertiger Zufallsgrößen. Zeigen Sie: Es gibt ein $R \in [0, \infty]$, so dass die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} X_n z^n$ für $|z| < R$ $\mathbb{P}$-fast sicher konvergiert und für $|z| > R$ $\mathbb{P}$-fast sicher divergiert.

Aufgabe 29. (5 Punkte)
Sei I eine beliebige Indexmenge und $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ eine Familien von messbaren Räumen. Im Rahmen des Satzes von Andersen-Jessen (Satz 11.3), wird eine σ-Algebra $\mathfrak{A}$ auf dem kartesischen Produkt $\Omega := \times_{i \in I} \Omega_i$ definiert als

$$\mathfrak{A} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{A}_i := \sigma(p_i, i \in I),$$

also die kleinste σ-Algebra, die alle Projektionen messbar macht. Im Beweis des Satzes, wird diese σ-Algebra dargestellt, als die von den endlich-dimensionalen Zylindermengen $\mathcal{Z}$ erzeugte. Zeigen Sie: $\mathfrak{A}$ ist tatsächlich gerade die Menge der abzählbar-dimensionalen Zylindermengen, also

$$\mathfrak{A} = \{A \in \Omega \ : \ \exists K \subset I \text{ abzählbar, } A_K \in \mathfrak{A}_K \text{ mit } A = p_K^{-1}(A_K)\}.$$

Bitte wenden.

Aufgabe 30. (5 Punkte)
Sei $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}, \mathfrak{B}^{\mathbb{R}^+}) = \bigotimes_{i\in\mathbb{R}^+}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Prüfen Sie, welche der Folgenden Mengen $\mathfrak{B}^{\mathbb{R}^+}$-messbar sind.

a) $A := \{\omega \in \Omega \ : \ (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert}\}$

b) $B := \{\omega \in \Omega \ : \ t \to \omega_t \text{ ist stetig}\}$

c) $C := \{\omega \in \Omega \ : \ \omega_n = \omega_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$

d) $D := \{\omega \in \Omega \ : \ t \to \omega_t \text{ ist monoton}\}$

Die folgenden Aufgaben sollen nicht abgegeben werden; sie werden in der Übung am 15.6. besprochen.

Aufgabe I.
Sei $X : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ eine Zufallsgröße. Zeigen Sie, dass X genau dann von allen Zufallsgrößen $Y : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ stochastisch unabhängig ist, wenn X $\mathbb{P}$-fast sicher konstant ist.

Aufgabe II.
Seien $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$ gleichverteilt auf dem Intervall $[-1, 1]$. Bestimmen Sie eine λ-Dichte von $\mathbb{P}_1 \star \mathbb{P}_2$.

Aufgabe III.
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zufallsgrößen und sei $\mathcal{T}_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ die σ-Algebra der (X_n)-terminalen Ereignisse analog zu Definition 9.8. Zeigen Sie:

a) Die Zufallsgrößen $\liminf X_n$ und $\limsup X_n$ sind (X_n)-terminal (d. h. sie sind $\mathcal{T}_\infty - \mathfrak{B}$-messbar).

b) Sei $a \in \mathbb{R}$. $\{\lim X_n = a\}$ und $\{\sum_{i=1}^n X_n \text{ konvergiert}\}$ sind (X_n)-terminale Ereignisse.

c) Das Ereigniss $\{\lim \sum_{i=1}^n X_n = a\}$ ist im Allgemeinen nicht (X_n)-terminal.