Übungen

Abgabetermin: Dienstag, 05.06.2007, 10:15 Uhr

Aufgabe 23. (5 Punkte)
Sei X eine normalverteilte Zufallsgröße mit Erwartungswert 0 und Varianz 1. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}X^n = \begin{cases} 0 & \text{für ungerades } n, \\ (n-1)!! & \text{für gerades } n, \end{cases}$$

wobei $1!! = 1$ und $n!! = n(n-2)!!$ sein soll.

Aufgabe 24. (6 Punkte)
Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Familien reellwertiger Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ mit $X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ in Verteilung und $Y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Y$ in Verteilung.

a) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen nicht gilt

$$X_n + Y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X + Y \text{ in Verteilung.}$$

b) Gelte zusätzlich $Y = a$ $\mathbb{P}$-fast sicher für ein $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$X_n + Y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X + Y \text{ in Verteilung}$$

und, falls $a>0$ $$X_n Y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} XY \text{ in Verteilung.}$$

Aufgabe 25. (5 Punkte)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen und bezeichne π_{a_n} die Poisson-Verteilung mit Parameter a_n.

a) Zeigen Sie $\pi_{a_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \delta_0$ schwach, falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Gelte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathfrak{B}$ mit $\pi_{a_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ schwach?

Aufgabe 26. (4 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge integrierbarer Funktionen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ und gelte $X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X_0$ in Verteilung. Zeigen Sie $\mathbb{E}|X_0| \leq \liminf \mathbb{E}|X_n|$.