Übungen

Abgabetermin: Dienstag, 22.05.2007, 10:15 Uhr

Aufgabe 19. (4 Punkte)
Seien f_n und g_n Folgen von messbaren reellwertigen Funktionen auf einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, $\mu(\Omega) < \infty$, und gelte $f_n \to f$ stochastisch und $g_n \to g$ stochastisch. Zeigen Sie

$$f_n g_n \to fg \text{ stochastisch.}$$

Aufgabe 20. (7 Punkte)
Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\mu(\Omega) < \infty$ und $(f_i)_{i\in I}$ für eine Indexmenge I eine Familie von reellwertigen messbaren Funktionen.

a) Zeigen Sie, dass $(f_i)_{i\in I}$ genau dann gleichgradig integrierbar ist, wenn

$$\sup_{i\in I} \int\limits_{|f_i|>a} |f_i| \mathrm{d}\mu \to 0 \text{ für } a \to \infty.$$

b) Zeigen Sie, dass $(f_i)_{i\in I}$ in $\mathcal{L}^1(\mu)$ beschränkt ist, wenn $(f_i)_{i\in I}$ gleichgradig integrierbar ist, die Umkehrung jedoch nicht gilt.

c) Sei $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ eine messbare Funktion mit $x^{-1}g(x) \to \infty$. Zeigen Sie, dass für jedes $c > 0$ die Familie

$$\{f \in \mathcal{L}^1(\mu) \ : \ \int g(|f|)\mathrm{d}\mu < c\}$$

gleichgradig integrierbar ist.

d) Zeigen Sie, dass $(f_i)_{i\in I}$ gleichgradig integrierbar ist, wenn $(f_i)_{i\in I}$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$ beschränkt ist für ein $p > 1$.

Aufgabe 21. (4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\mu(\Omega) < \infty$ und $f : \Omega \to R_0^+$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie:

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int\limits_{[0,\infty)} \mu(\{f > t\})\lambda(dt).$$

Bitte wenden.

Aufgabe 22. (5 Punkte)
Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{A}$ eine σ-Algebra und $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ messbar. Weiterhin sei μ σ-endlich. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Radon und Nikodym: Es gibt eine $\mathfrak{F}$-messbare Funktion X_0 mit

$$\int\limits_A X \mathrm{d}\mu = \int\limits_A X_0 \mathrm{d}\mu \text{ für alle } A \in \mathfrak{F}.$$