Übungen

Abgabetermin: Dienstag, 15.05.2007, 10:15 Uhr

Aufgabe 15. (5 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Zeigen Sie:

a) Die Funktion $x \to F(x) := \int_{(-\infty,x]} f(t)\ \lambda(\mathrm{d}t)$ ist gleichmäßig stetig.

b) Ist f stetig in x_0, so ist F differenzierbar in x_0 und es gilt $F'(x_0) = f(x_0)$.

Aufgabe 16. (4 Punkte)
Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht ausgeartetes Intervall und $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit:

(i) $\omega \to f(x, \omega)$ ist μ-integrierbar für alle $x \in I$.

(ii) $x \to f(x, \omega)$ ist differenzierbar für μ-fast alle $\omega \in \Omega$.

(iii) Es gibt eine μ-integrierbare Funktion $h : \Omega \to \mathbb{R}^+$ mit

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} f(x, \omega)\right| \leq h(\omega) \qquad \text{für alle } \omega \in \Omega, x \in I.$$

Zeigen Sie: Die Funktion $\psi : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\psi(x) := \int_\Omega f(x, \omega)\ \mu(\mathrm{d}\omega)$$

ist differenzierbar und es gilt $\psi'(x) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x} f(x, \omega)\ \mu(\mathrm{d}\omega)$.

Aufgabe 17. (6 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{1}{x} \sin x$. Zeigen Sie:

a) f ist nicht Lebesgue-integrierbar.

b) f ist Riemann-integrierbar.

Aufgabe 18. (5 Punkte)
Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\mu(\Omega) < \infty$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren, reellwertigen Funktionen auf Ω. Zeigen Sie: f_n konvergiert genau dann stochastisch gegen eine messbare, reellwertige Funktion f, wenn jede Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine μ-fast sicher gegen f konvergente Teilfolge enthält.