Übungen

Abgabetermin: Montag, 30.04.2007, 17:00 Uhr

Aufgabe 9. (5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für jede abzählbare Teilmenge A des $\mathbb{R}^n$ gilt:

$$A \text{ ist Borel-messbar und } \lambda(A) = 0$$

b) Sei H eine m-dimensionale Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ mit $m < n$. Zeigen Sie $\lambda^n(H) = 0$.

Aufgabe 10. (5 Punkte)

Für jede Zahl $x \in [0,1]$ gibt es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \in \{0,1,2\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k}$. Diese Folge heißt triadische Entwicklung von x. Das Cantorsche Diskontinuum C sei definiert als

$$C := \{x \in [0,1] \ : \ \exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ mit } x_k \in \{0,2\} \text{ und } x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k}\}.$$

Zeigen Sie:

a) C ist überabzählbar.

b) C ist kompakt.

c) $\lambda(C) = 0$ (wobei λ das Lebesque-Maß bezeichne).

Hinweis: Für Teil a) genügt es, eine surjektive Abbildung $C \to [0,1]$ anzugeben. Für die folgenden Teile überlegen Sie sich, dass sich C wie folgt konstruieren lässt: Startend mit $K_0 := [0,1]$ entfernen Sie um K_n zu erhalten im n-ten Schritt alle Punkte aus K_{n-1}, bei denen alle triadische Entwicklungen an der n-ten Stelle eine 1 aufweisen. Das ist im ersten Schritt das offene Intervall $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, also ist $K_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Dann ist $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

Aufgabe 11. (5 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und f eine $\mathfrak{A}$-messbare numerische Funktion. Weiterhin sei $N \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(N) = 0$. Zeigen Sie über die Definition des Integrals

$$\int_N f \mathrm{d}\mu = 0.$$

Bitte wenden.

Aufgabe 12. (5 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ eine messbare, μ-integrierbare Funktion. Weiterhin sei ν auf $\mathfrak{A}$ definiert durch

$$\nu(A) := \int_A f \mathrm{d}\mu.$$

Zeigen Sie

a) ν ist ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$.

b) Sei g eine messbare, ν-integrierbare Funktion, dann gilt

$$\int g \mathrm{d}\nu = \int g \cdot f \mathrm{d}\mu.$$