Übungen

Abgabetermin: Dienstag, 03.07.2007, 10:15 Uhr

Aufgabe 31. (5 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger, quadratintegrabler, stochastisch unabhängiger und identisch verteilter Zufallsgrößen und sei $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

a) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2)$.

b) Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \operatorname{Var} X_1 \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Aufgabe 32. (5 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger, auf dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilter Zufallsgrößen. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n X_i} = \frac{1}{e} \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Aufgabe 33. (5 Punkte)
Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{n \text{ mal}} \sin(\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^n x_i)\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = 1$$

Aufgabe 34. (5 Punkte)
Zeigen Sie folgende Version des starken Gesetzes der großen Zahlen: Sei $(X_n) : n \in \mathbb{N}$ eine Folge von paarweise unkorrelierten Zufallsgrößen mit gleichmäßig beschränkter Varianz (d. h. Es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{Var} X_n \le C$ für alle $n \in \mathbb{N}$), dann gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zunächst für die Teilfoge $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n^2} X_i - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n^2} \mathbb{E}X_i$.