Übungen

Abgabetermin: Dienstag, 17.04.2007, 10:15 Uhr

Aufgabe 1. (5 Punkte)

a) Sei I eine beliebige Indexmenge und für jedes $i \in I$ sei $\mathfrak{A}_i$ eine σ-Algebra über einem Raum Ω. Zeigen Sie:

$$\mathfrak{A} := \bigcap_{i \in I} \mathfrak{A}_i \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra auf } \Omega.$$

b) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen die Vereinigung zweier σ-Algebren auf einem Raum keine σ-Algebra sein muss.

Aufgabe 2. (5 Punkte)

Sei $\mathfrak{B}$ die von $\mathfrak{E} := \{(a, b] \ : \ -\infty < a < b < \infty\}$ erzeugte σ-Algebra der Borel-Mengen auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengensysteme ebenfalls Erzeuger von $\mathfrak{B}$ sind:

$$\mathfrak{E}_1 := \{(-\infty, q] \ : \ q \in \mathbb{Q}\}$$
$$\mathfrak{E}_2 := \{U \subset \mathbb{R} \ : \ U \text{ offen}\}$$
$$\mathfrak{E}_3 := \{A \subset \mathbb{R} \ : \ A \text{ abgeschlossen}\}$$
$$\mathfrak{E}_4 := \{K \subset \mathbb{R} \ : \ K \text{ kompakt}\}$$

Aufgabe 3. (6 Punkte)

Im Folgenden bezeiche $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ die symmetrische Differenz der Mengen A und B.

a) Sei Ω eine nichtleere Menge, I eine Indexmenge und $A_i, B_i \subset \Omega, i \in I$. Zeigen Sie:

$$\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \Delta \Big(\bigcup_{i \in I} B_i\Big) \subset \bigcup_{i \in I} (A_i \Delta B_i)$$

b) Sei weiter $\mathfrak{A}$ eine Algebra über Ω und μ ein endliches Maß auf $\sigma(\mathfrak{A})$. Zeigen Sie mit Hilfe des Dynkin-System-Arguments: Zu jeder Menge $S \in \sigma(\mathfrak{A})$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Menge $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A \Delta S) < \varepsilon$.

c) Gilt die Aussage aus Teil b) auch noch, wenn man statt einer Algebra einen schnittstabilen Erzeuger einsetzt?

Bitte wenden.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Seien Ω und $\hat{\Omega}$ nichtleere Räume, $\hat{\mathfrak{E}} \subset \mathcal{P}(\hat{\Omega})$ und f eine Abbildung von Ω nach $\hat{\Omega}$. Zeigen Sie:

$$f^{-1}(\sigma(\hat{\mathfrak{E}})) = \sigma(f^{-1}(\hat{\mathfrak{E}}))$$

Die folgenden Aufgaben sollen nicht abgegeben werden; sie werden in der ersten Übung besprochen.

Aufgabe I.
Sei Ω eine überabzählbare Menge und $\mathfrak{E} := \{\{x\} \ : \ x \in \Omega\}$ das System der Einpunktmengen. Bestimmen Sie die von $\mathfrak{E}$ erzeugte Algebra $\alpha(\mathfrak{E})$, σ-Algebra $\sigma(\mathfrak{E})$ und das von $\mathfrak{E}$ erzeugte Dynkin-System $\delta(\mathfrak{E})$.

Aufgabe II.
Sei $\mathfrak{E}$ ein Erzeugendensystem der σ-Algebra $\mathfrak{A}$. Zeigen Sie: Zu jeder Menge $S \in \mathfrak{A}$ existiert eine Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $S \in \sigma((E_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Aufgabe III.
Sei μ ein Inhalt auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$. Zeigen Sie, dass μ genau dann ein Maß ist, wenn μ sub-σ-additiv ist, also für alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$