Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hauke Seidel

Wintersemester 2017/18
1. Dezember 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie 2

Übungsblatt 8

Abgabe: 11. Dezember 2017 bis 14:15 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Bestimmen Sie für eine Brown'sche Bewegung $(B(t))_{t\geq 0}$ einen fast sicheren Wert von

$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{B(t)}{t^\alpha}$$

als Funktion von $\alpha > 0$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$ mit rechtsstetiger Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ seien Stoppzeiten $T_1, T_2, \ldots$ definiert.

(a) Zeigen Sie, dass wenn für jedes $\omega \in \Omega$ die Konvergenz $T_n(\omega) \downarrow T(\omega)$ gilt, der Grenzwert $T\colon \Omega \to [0,\infty]$ eine Stoppzeit ist.

(b) Zeigen Sie, dass wenn für jedes $\omega \in \Omega$ die Konvergenz $T_n(\omega) \uparrow T(\omega)$ gilt, der Grenzwert $T\colon \Omega \to [0,\infty]$ eine Stoppzeit ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
$(B(t))_{t\geq 0}$ sei eine Brown'sche Bewegung. Zeigen Sie, dass

(a) $(B^2(t) - t)_{t\geq 0}$ ein Martingal ist.

(b) $\left(\mathrm{e}^{\theta B(t) - \frac{\theta^2 t}{2}}\right)_{t\geq 0}$ für jedes $\theta \in \mathbb{R}$ ein Martingal ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
$f \in C[0,1]$ sei eine stetige Funktion mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass mit positiver Wahrscheinlichkeit die Brown'sche Bewegung $(B(t))_{t\geq 0}$ nah an dieser Funktion liegt, also dass für jedes $\varepsilon > 0$ die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}\left[\sup_{s\in[0,1]} |B(s) - f(s)| \leq \varepsilon\right] > 0$$

ist.
Hinweis: Führen Sie den Stetigkeitsmodul $\omega(\delta) := \sup_{t\in[0,1-\delta]}\left|B(t+\delta) - B(t)\right|$ ein.