Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hauke Seidel

Wintersemester 2017/18
24. November 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie 2

Übungsblatt 8

Abgabe: 4. Dezember 2017 bis 14:15 Uhr

Aufgabe 1 (2 Punkte)
$(B(t))_{t\geq 0}$ sei eine Brown'sche Bewegung. Berechnen Sie für $s,t>0$

$$\mathrm{Cov}(B^2(s), B^2(t)).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
$(B(t))_{t\geq 0}$ sei eine Brown'sche Bewegung. Zeigen Sie, dass die Folge

$$\left(\sup_{t\in[n,n+1)}\left|\frac{B(t)-B(n)}{n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

fast sicher gegen 0 konvergiert. Verwenden Sie dazu nicht das Gesetz vom iterierten Logarithmus, sondern die aus der Vorlesung bekannte Verteilung des Maximums der Brown'schen Bewegung auf $[0,1]$. Folgern Sie den Hinweis zu Aufgabe 2 auf Blatt 7, also dass fast sicher

$$\lim_{t\to\infty}\frac{B(t)}{t}=0$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Für eine Brown'sche Bewegung $(B(t))_{t\geq 0}$ und eine reelle Zahl $a>0$ sei die Stoppzeit $T_a := \inf\{s\geq 0 : B(s)=a\}$ die Ersteintrittszeit in $\{a\}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Dichte f_{T_a} von T_a die folgende Form hat:

$$f_{T_a}(x)=\frac{a}{\sqrt{2\pi x^3}}\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2x}}1_{\{x>0\}}$$

(b) Zeigen Sie, dass der stochastische Prozess $(T_a)_{a\geq 0}$ unabhängige und stationäre Zuwächse hat, also dass für alle $n\in\mathbb{N}$ und alle $0\leq a_1<\ldots<a_n$ die Zufallsvariablen $T_{a_1},(T_{a_2}-T_{a_1}),\ldots,(T_{a_n}-T_{a_{n-1}})$ unabhängig sind und dass für festes $h>0$ die Zufallsvariablen $(T_{a+h}-T_a)$, $a\geq 0$ identisch verteilt sind.

(c) Die Verteilung der Zufallsvariable T_a heißt „Levy(a^2)-Verteilung“. Für $b,c>0$ sei X Levy(b^2)-verteilt und Y Levy(c^2)-verteilt. Zeigen Sie, dass die Summe $X+Y$ Levy(b^2+c^2)-verteilt ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Der d-dimensionale stochastische Prozess $(B(t))_{t\geq 0}$ gegeben durch $B(t)=(B_1(t),\ldots,B_d(t))$ heißt d-dimensionale Brown'sche Bewegung, wenn die $B_j, j=1,\ldots,d$ unabhängige eindimensionale Brown'sche Bewegungen sind.
$A\in O(d)$ sei eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie, dass wenn $(B(t))_{t\geq 0}$ eine d-dimensionale Brown'sche Bewegung ist, $(A\cdot B(t))_{t\geq 0}$ auch eine ist.