Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hauke Seidel

Wintersemester 2017/18
20. November 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie 2

Übungsblatt 7

Abgabe: 27. November 2017 bis 14:15 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zum Zeitpunkt $n = 0$ enthalte eine Urne a rote und b schwarze Kugeln, wobei $a, b \in \mathbb{N}$ sind. Es werden wiederholt einzelne Kugeln völlig zufällig gezogen. Immer wenn eine Kugel gezogen wird, wird sie zusammen mit einer weiteren Kugel der selben Farbe zurückgelegt (Pólya-Urne). So sind für $n \in \mathbb{N}$ vor dem n-ten Ziehen $a + b + n - 1$ Kugeln in der Urne.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $X_n = 1$, wenn die n-ten gezogene Kugel rot ist und $X_n = 0$ sonst. Zeigen sie dass die Folge der Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ austauschbar ist.

Aufgabe 2 (1+1+1+1 Punkte)
$(B(t))_{t\geq 0}$ sei eine Brown'sche Bewegung. Zeigen Sie, dass die folgenden Prozesse Brown'sche Bewegungen sind:

(a) $(-B(t))_{t\geq 0}$

(b) $(B(t + a) - B(a))_{t\geq 0}$ für $a \geq 0$

(c) $\left(\frac{B(at)}{\sqrt{a}}\right)_{t\geq 0}$ für $a > 0$

(d) $(X(t))_{t\geq 0}$ mit $X(t) = tB(\frac{1}{t})$ für $t > 0$ und $X(0) = 0$

Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass für jede Brown'sche Bewegung B der Grenzwert f.s. $\lim_{t\to\infty} \frac{B(t)}{t} = 0$ ist (starkes Gesetz der großen Zahlen für die Brown'sche Bewegung).

Aufgabe 3 (3 Punkte)
$(B(t))_{t\geq 0}$ sei eine Brown'sche Bewegung. Zeigen Sie, dass der Prozess $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$ gegeben durch

$$X(t) = \frac{B(\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}}$$

stationär ist, das heißt, dass für jedes $h \in \mathbb{R}$, jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ der Zufallsvektor $\big(X(t_1 + h), \ldots, X(t_n + h)\big)$ genauso verteilt ist wie $\big(X(t_1), \ldots, X(t_n)\big)$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Ω sei die Menge aller Funktionen $\omega\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\mathcal{F}$ sei die Produkt-σ-Algebra, also die σ-Algebra, die von den Mengen der Form

$$\{\omega \in \Omega : \omega(t_i) \in A_i \text{ für } 1 \leq i \leq n\}, \quad n \in \mathbb{N}, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

erzeugt wird.

(a) Zeigen Sie, dass alle Ereignisse in $\mathcal{F}$ nur von abzählbar vielen Koordinaten abhängen, das heißt, dass zu jedem $F \in \mathcal{F}$ eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gibt, sodass F die Form $F = \{\omega \in \Omega : (\omega(t_1), \omega(t_2), \ldots) \in B\}$ hat.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $C(\mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht in $\mathcal{F}$ liegt.