Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hauke Seidel

Wintersemester 2017/18
23. Oktober 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie 2

Übungsblatt 3

Abgabe: 30. Oktober 2017 bis 14:15 Uhr

Aufgabe 1 (3 Punkte)
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei ein Submartingal und T eine Stoppzeit. Zeigen Sie, dass wenn T durch ein $n_0 \in \mathbb{N}$ beschränkt ist, d.h. wenn fast sicher $T \leq n_0$ ist, folgendes gilt:

$$\mathbb{E}X_T \leq \mathbb{E}X_{n_0}$$

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)
$(X_t)_{t\in T}$ sei eine Familie von Zufallsvariablen.

(a) Zeigen Sie, dass $(X_t)_{t\in T}$ gleichgradig integrierbar ist, wenn es eine Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ gibt, die $\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$ und $\sup_{t\in T} \mathbb{E}\varphi(|X_t|) < \infty$ erfüllt.

(b) $(X_t)_{t\in T}$ sei gleichgradig integrierbar. Zeigen Sie, dass es eine reellwertige Folge $a_n \to \infty$ gibt, sodass

$$\varphi\colon \mathbb{R} \to [0,\infty), x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} (x - a_n)^+$$

die beiden Bedingungen aus (a) erfüllt.
Bemerkung: Dieses φ is offensichtlich konvex und monoton wachsend.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Sei $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ eine integrierbare Zufallsgröße. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \text{ ist Unter-}\sigma\text{-Algebra}\}$$

gleichgradig integrierbar ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
$f\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ sei eine Lipschitz-stetige Funktion, das heißt, es gibt eine Konstante $L \geq 0$, so dass für jedes Paar $s,t \in [0,1)$ die Ungleichung $|f(t) - f(s)| \leq L|t-s|$ erfüllt ist. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $\big([0,1), \mathcal{B}([0,1)), \lambda\big|_{[0,1)}\big)$ sei die Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ durch

$$X_n(\omega) = \frac{f\left((k+1)2^{-n}\right) - f(k2^{-n})}{2^{-n}} \text{ für } \omega \in I_{k,n}$$

definiert, wobei $I_{k,n} := [k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ für $k = 0, \ldots, 2^n - 1$ ist. Zeigen Sie:

(a) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $\mathcal{F}_n = \sigma(I_{k,n} : k = 0, \ldots, 2^n - 1)$.

(b) Es gibt einen Grenzwert X_∞, sodass $X_n \to X_\infty$ f.s. und in L^1.

(c) Für alle $x \in [0,1)$ ist

$$f(x) = f(0) + \int_0^x X_\infty(\omega)\mathrm{d}\omega$$

Somit ist jede Lipschitz-stetige Funktion absolut stetig und fast überall differenzierbar.