Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hauke Seidel

Wintersemester 2017/18
15. Januar 2018

Wahrscheinlichkeitstheorie 2

Übungsblatt 13

Abgabe: 22. Januar 2018 bis 14:15 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Das Gauß-Maß μ auf $([0,1],\mathcal{B})$ ist durch

$$\mu(B) = \frac{1}{\log 2}\int_B \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x \text{ für Borel-Mengen } B \subseteq [0,1]$$

gegeben. Die Abbildung $T\colon [0,1] \to [0,1]$ sei definiert durch $T(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$ für $x \neq 0$ und $T(0) = 0$. Zeigen Sie, dass μ invariant unter T ist, also dass für jede Borel-Menge B

$$\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$$

ist. *Bemerkung:*

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Auf $\mathbb{R}$ ist die Cauchy$(0,1)$-Verteilung durch die Lebesgue-Dichte $f(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$ gegeben. Die Boole-Abbildung $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $T(0) = 0$ und

$$T(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right), x \neq 0.$$

Zeigen Sie, dass T bezüglich der Cauchy-Verteilung maßtreu ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
$T\colon (X,\mu) \to (X,\mu)$ sei maßtreu, invertierbar und ergodisch. Zeigen Sie, dass sogar für messbare Mengen $A \subseteq X$, die nur $A = T^{-1}(A) \mod \mu$ erfüllen, schon $\mu(A) \in \{0,1\}$ ist.
Bemerkung: $A = B \mod \mu$ bedeutet $\mu(A \triangle B) = 0$. Dabei ist $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die symmetrische Differenz.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Für irrationales $x \in (0,1)$ gibt es eine eindeutige Darstellung als Kettenbruch

$$x = \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{x_3 + \dots}}}$$

mit $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für Lebesgue-f.a. $x \in (0,1)$ die folgende Relation gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{r(r+2)}\right)^{\log_2(r)}$$