Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hauke Seidel

Wintersemester 2017/18
14. Dezember 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie 2

Übungsblatt 11

Abgabe: 8. Januar 2018 bis 14:15 Uhr

Aufgabe 1 (3 Punkte)
$(B_1(t))_{t\geq 0}$ und $(B_2(t))_{t\geq 0}$ seien zwei unabhängige Brown'sche Bewegungen. Für welche Zahlen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ist $(Y(t))_{t\geq 0}$ gegeben durch $Y(t) = a_1 B_1(t) + a_2 B_2(t)$ eine Brown'sche Bewegung?

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Auf der Menge $\mathcal{M}_1(S)$ der Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem metrischen Raum (S, d) ist die Prochorow-Metrik $\rho_p \colon \mathcal{M}_1(S) \times \mathcal{M}_1(S) \to [0, \infty)$ durch

$$\rho_p(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2) = \inf\{\varepsilon > 0 : \text{für alle } A \in \mathcal{B} \text{ ist } \mathbb{P}_1(A) \leq \mathbb{P}_2(A^\varepsilon) + \varepsilon \text{ und } \mathbb{P}_2(A) \leq \mathbb{P}_1(A^\varepsilon) + \varepsilon\}$$

definiert. Dabei ist $A^\varepsilon := \{s \in S : \operatorname{dist}(s, A) < \varepsilon\}$ und $\operatorname{dist}(s, A) := \inf_{a \in A} d(s, a)$.
Zeigen Sie, dass ρ_p eine Metrik mit $\rho_p(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2) \leq 1$ für alle $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \in \mathcal{M}_1(S)$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei (S, d) ein separabler metrischer Raum. Zeigen Sie, dass sich jede offene Menge $U \subseteq S$ als Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Bällen schreiben lässt. Ein abgeschlossener Ball ist eine Menge der Form $\overline{B_r(s)} = \{x \in S : d(x, s) \leq r\}$, wobei $r > 0, s \in S$ sind.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Auf dem metrischen Raum $C[0, 1]$ (versehen mit der Supremumsmetrik) sind die Produkt-σ-Algebra $\mathcal{F}$ und die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$ durch

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \sigma\{A_t^u = \{f \in C[0,1] : f(t) < u\} : t \in [0,1], u \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{B} &= \sigma\{U \subseteq C[0,1] : U \text{ offen}\} \end{aligned}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ ist.
Hinweise:
Um $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ zu beweisen, zeigen Sie, dass jedes A_t^u offen ist.
Zeigen Sie für $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ zunächst, dass für alle $\varepsilon > 0$ und alle $f \in C[0, 1]$ der abgeschlossene Ball $\overline{B_\varepsilon(f)} \in \mathcal{F}$ ist.