Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hauke Seidel

Wintersemester 2017/18
11. Dezember 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie 2

Übungsblatt 10

Abgabe: 18. Dezember 2017 bis 14:15 Uhr

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Für eine Brown'sche Bewegung $(B(t))_{t\geq 0}$ sei $Z := \{t \geq 0 : B(t) = 0\}$ die Menge der Nullstellen von B. Zeigen Sie, dass Z mit Wahrscheinlichkeit 1 eine Lebesgue-Nullmenge ist.
Hinweis: Nutzen Sie den Satz von Fubini.

Für die nächsten drei Aufgaben sei $(B(t))_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung und für reelle Zahlen c sei $T_c := \inf\{t \geq 0 : B(t) = c\}$ die Ersteintrittszeit von B in $\{c\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass für alle $a > 0$ und alle $\lambda \geq 0$

$$\mathbb{E}\mathrm{e}^{-\lambda T_a} = \mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}a}$$

gilt. $\mathbb{E}\mathrm{e}^{-\lambda T_a}$ heißt „Laplace-Transformierte“ von T_a bzw. von der Lévy(a^2)-Verteilung.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für alle $0 < u < v < a$ und alle $t > 0$

$$\mathbb{P}(\{T_a < t\} \cap \{u < B(t) < v\}) = \mathbb{P}(2a - v \leq B(t) \leq 2a - u).$$

(b) $(M(t))_{t\geq 0}$ gegeben durch $M(t) = \sup_{0\leq s\leq t} B(s)$ sei das Supremum der Brownschen Bewegung auf $[0, t]$. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung des zweidimensionalen Vektors $(M(t), B(t))$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Für $a, b > 0$ sei $T := T_{-a} \wedge T_b = \inf\{t \geq 0 : B(t) = -a \text{ oder } B(t) = b\}$ die Ersteintrittszeit in $\{-a, b\}$.

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(B(T) = -a)$ und $\mathbb{P}(B(T) = b)$.

(b) Bestimmen Sie $\mathbb{E}T$.

Hinweise: Nutzen Sie und begründen Sie kurz, dass T fast sicher endlich ist.