Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hauke Seidel

Wintersemester 2017/18

Wahrscheinlichkeitstheorie 2

Übungsblatt 1

Abgabe: 16. Oktober 2017 bis 14:15 Uhr

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum, $T\colon \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ eine messbare Abbildung und $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess und $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Borel-Menge. Die Ersteintrittszeit in A ist definiert als

$$\tau := \min\{n \in \mathbb{N}_0 : Z_n \in A\}.$$

Zeigen Sie, dass τ eine Stoppzeit bezüglich der natürlichen Filtration von $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist.
(Das Minimum der leeren Menge ist als $+\infty$ definiert.)

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration, $T\colon \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ bezüglich dieser eine Stoppzeit und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein an dieser Filtration adaptierter stochastischer Prozess. Zeigen Sie, dass der gestoppte Prozess

$$(X_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}_0}$$

an $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ adaptiert ist.

Aufgabe 4 (2+3 Punkte)

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Martingale bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Außerdem sei $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Wenn $\psi(X_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ integrierbar ist, ist $(\psi(X_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Submartingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(b) $(X_n \wedge Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Supermartingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.