Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hauke Seidel

Wintersemester 2017/18

Wahrscheinlichkeitstheorie 2

Übungsblatt 0

(wird nicht bewertet)

Aufgabe 1 In einem großen Unternehmen wurden für die Auszubildenden die in einem Einstellungstest erzielte Note X und die Abschlussnote Y untersucht. Für die beiden Noten ergab sich folgende gemeinsame Verteilung (die Tabelle enthält die Werte $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ für $1 \le x, y \le 4$).

x \ y	1	2	3	4
1	0.15	0.09	0.05	0.01
2	0.12	0.15	0.10	0.03
3	0.03	0.05	0.09	0.08
4	0.00	0.01	0.01	0.03

(a) Bestimmen Sie die Randverteilungen von X und Y sowie deren Kovarianz.

(b) Bestimmen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(Y = y|X = 3)$ für $1 \le y \le 4$ und damit den zugehörigen bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}(Y|X = 3)$.

Aufgabe 2

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ und $X, (X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ nichtnegative Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

(a) Aus $X_n \uparrow X$ f.s. folgt $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}) \uparrow \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ f.s.

(b) $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}) \ge \mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathcal{F})$ f.s.

(c) Aus $X_n \to X$ f.s. folgt im allgemeinen nicht $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}) \to \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ f.s.

Bemerkung: Für eine nichtnegative Zufallsvariable X ist der bedingte Erwartungswert $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ auch dann definiert, wenn X nicht integrierbar ist. Er ist definiert als die f.s. eindeutige Zufallsvariable $Z = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$, die für alle $F \in \mathcal{F}$ die Gleichung $\int_F Z \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F X \mathrm{d}\mathbb{P}$ erfüllt.