KAPITEL 6

Statistische Entscheidungstheorie

6.1. Verlustfunktion, Risiko, Minimax–Schätzer

Es sei $(\mathfrak{X}, \mathcal{A}, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta})$ ein statistisches Modell. Das heißt, $\mathfrak{X}$ ist die Menge aller möglichen Stichproben, $\mathcal{A}$ ist eine σ–Algebra auf $\mathfrak{X}$ und $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ ist eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$. Nun wird eine Stichprobe X gemäß einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_\theta$ zufällig aus $\mathfrak{X}$ gezogen, wobei $\theta \in \Theta$ unbekannt bleibt. Wir konstruieren einen Schätzer $\hat\theta : \mathfrak{X} \to \Theta$ und versuchen, den Parameter $\theta \in \Theta$ durch $\hat\theta(X)$ zu schätzen. Stellen wir uns nun vor, dass wir für den Fehler, den wir dabei typischerweise machen, eine Strafe der Größe $D(\theta, \hat\theta(X))$ auferlegt bekommen, wobei $D : \Theta \times \Theta \to [0, \infty)$ eine vorgegebene Funktion ist, die *Verlustfunktion* genannt wird. Natürliche Beispiele von Verlustfunktionen sind:

(1) quadratische Verlustfunktion: $D(\theta) = \|\hat\theta - \theta\|^2$;
(2) absoluter Fehler: $D(\theta) = \|\hat\theta - \theta\|$;
(3) L^p-Verlust: $D(\theta) = \|\hat\theta - \theta\|^p$;
(4) Null–Eins–Verlust: $D(\theta) = \mathbb{1}_{\{\hat\theta\neq\theta\}}$,

wobei wir in den ersten drei Fällen voraussetzen, dass $\Theta \subset \mathbb{R}^m$ ist, und $\|\hat\theta - \theta\|$ den Euklidischen Abstand zwischen $\hat\theta$ und θ bezeichnet.

Definition 6.1.1. Das *Risiko* eines Schätzers $\hat\theta$ ist

$$R(\theta; \hat\theta) = \mathbb{E}_\theta D(\theta, \hat\theta(X)).$$

Im Folgenden werden wir sehr oft $\hat\theta$ als eine Abkürzung für die Zufallsvariable $\hat\theta(X)$ benutzen.

Beispiel 6.1.2. Für die quadratische Verlustfunktion $D(\theta, \hat\theta) = (\hat\theta - \theta)^2$ (wobei $\Theta \subset \mathbb{R}$ vorausgesetzt wird) stimmt das Risiko mit dem mittleren quadratischen Fehler überein:

$$R(\theta; \hat\theta) = \mathbb{E}_\theta(\hat\theta - \theta)^2 = \mathrm{MSE}_\theta(\hat\theta) = \mathrm{Var}_\theta\, \hat\theta + (\mathrm{Bias}_\theta\, \hat\theta)^2.$$

Man kann das Risiko benutzen, um verschiedene Schätzer miteinander zu vergleichen: je kleiner das Risiko, umso besser der Schätzer.

Definition 6.1.3. Wir sagen, dass ein Schätzer $\hat\theta_1$ *gleichmäßig besser* als ein anderer Schätzer $\hat\theta_2$ ist, wenn

$$R(\theta; \hat\theta_1) \le R(\theta; \hat\theta_2) \text{ für alle } \theta \in \Theta.$$

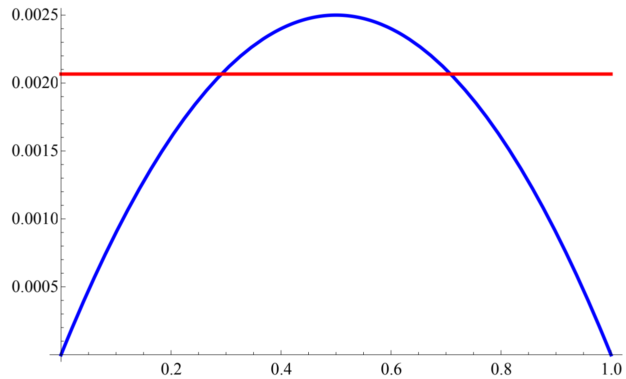

ABBILDUNG 1. Die Risikofunktionen $R(\theta; \hat{\theta}_1)$ (blau) und $R(\theta; \hat{\theta}_2)$ (rot) aus Beispiel 6.1.6. Der Stichprobenumfang ist $n = 100$.

Es kann aber durchaus passieren, dass $R(\theta'; \hat{\theta}_1) < R(\theta'; \hat{\theta}_2)$ für ein gewisses $\theta' \in \Theta$ und $R(\theta''; \hat{\theta}_1) > R(\theta''; \hat{\theta}_2)$ für ein anderes $\theta'' \in \Theta$. In diesem Fall ist kein Schätzer gleichmäßig besser als der andere. Es wäre deshalb schön, die Qualität eines Schätzers durch eine Zahl (und nicht durch eine Funktion von θ) charakterisieren zu können. Dazu gibt es zwei natürliche Ansätze. Zuerst betrachten wir den **Minimax–Ansatz**.

Definition 6.1.4. Das *maximale Risiko* eines Schätzers $\hat{\theta}$ ist

$$M(\hat{\theta}) = \sup_{\theta \in \Theta} R(\theta; \hat{\theta}).$$

Definition 6.1.5. Ein Schätzer $\hat{\theta}$ heißt *Minimax–Schätzer*, wenn das maximale Risiko von $\hat{\theta}$ nicht größer ist, als das maximale Risiko jedes anderen Schätzers $\tilde{\theta}$, d.h. wenn

$$\sup_{\theta \in \Theta} R(\theta; \hat{\theta}) = \inf_{\tilde{\theta}} \sup_{\theta \in \Theta} R(\theta; \tilde{\theta}).$$

Beispiel 6.1.6. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, mit Parameter $\theta \in (0, 1)$ Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen. Wir benutzen die quadratische Verlustfunktion $D(\theta, \hat{\theta}) = (\hat{\theta} - \theta)^2$. Wir werden nun zeigen, dass der Mittelwert $\hat{\theta}_1 := \bar{X}_n$ erstaunlicherweise *kein* Minimax–Schätzer für θ ist. Die Risikofunktion von $\hat{\theta}_1$ ist gegeben durch

$$R(\theta; \hat{\theta}_1) = \operatorname{Var}_\theta \hat{\theta}_1 + (\operatorname{Bias}_\theta \hat{\theta}_1)^2 = \operatorname{Var}_\theta \hat{\theta}_1 = \frac{\theta(1-\theta)}{n}.$$

Für das maximale Risiko von $\hat{\theta}_1$ erhalten wir somit

$$M(\hat{\theta}) = \sup_{\theta \in (0,1)} \frac{\theta(1-\theta)}{n} = \frac{1}{4n}.$$

Betrachte nun den Schätzer
$$\hat{\theta}_2 = \frac{S_n + \alpha}{\alpha + \beta + n},$$
wobei $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ und die Konstanten $\alpha, \beta > 0$ noch zu wählen sind. Dieser Schätzer ist der Bayes–Schätzer für θ wenn die a–priori–Verteilung von θ eine Beta(α, β)–Verteilung ist, vgl. Beispiel **??**. Das Risiko von $\hat{\theta}_2$ ist
$$R(\theta; \hat{\theta}_2) = \operatorname{Var}_\theta \hat{\theta}_1 + (\operatorname{Bias}_\theta \hat{\theta}_1)^2 = \frac{n\theta(1-\theta)}{(\alpha+\beta+n)^2} + \left(\frac{n\theta + \alpha}{\alpha+\beta+n} - \theta\right)^2.$$
Wir wollen nun α und β so wählen, dass die Funktion $R(\theta; \hat{\theta}_2)$ nicht von θ abhängt. (Der Grund dafür wird später ersichtlich sein, siehe Satz 6.3.3). Nach einer einfachen Rechnung kann man sich überzeugen, dass dies für $\alpha = \beta = \frac{1}{2}\sqrt{n}$ der Fall ist. Der Schätzer $\hat{\theta}_2$ und sein Risiko sehen in diesem Fall wie folgt aus:
$$\hat{\theta}_2 = \frac{S_n + \frac{1}{2}\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}}, \quad R(\theta; \hat{\theta}_2) = \frac{n}{4(n+\sqrt{n})^2} < \frac{1}{4n}.$$
Somit ist $\hat{\theta}_1$ kein Minimax–Schätzer. Später werden wir zeigen, dass $\hat{\theta}_2$ der Minimax–Schätzer ist. Es sei aber bemerkt, dass die Menge aller θ, für die $\hat{\theta}_2$ besser als $\hat{\theta}_2$ ist, ein (bei großem n) sehr kleines Intervall um $\frac{1}{2}$ ist und dass der Unterschied zwischen den Risiken von θ_1 und θ auf diesem Intervall sehr gering ist. Für alle anderen θ's ist der konventionelle Schätzer $\hat{\theta}_1$ besser.

Aufgabe 6.1.7. Welche Länge hat das Intervall $\{\theta \in (0,1) \colon R(\theta; \hat{\theta}_1) > R(\theta, \hat{\theta}_2)\}$?

6.2. Bayes–Schätzer

Nun betrachten wir den **Bayes–Ansatz** zur Charakterisierung des Risikos eines Schätzers. Wir nehmen an, dass für den Parameter θ eine a–priori–Verteilung, also ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Θ, vorgegeben ist. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall, wenn $\Theta \subset \mathbb{R}^m$ eine messbare Menge mit positivem Lebesgue–Maß ist und die a–priori–Verteilung von θ eine Lebesgue–Dichte $q : \Theta \to \mathbb{R}_+$ besitzt.

Definition 6.2.1. Das *Bayes–Risiko* eines Schätzers $\hat{\theta}$ unter der a–priori–Verteilung q ist gegeben durch
$$B_q(\hat{\theta}) = \int_\Theta R(\theta; \hat{\theta}) q(\theta) d\theta.$$

Definition 6.2.2. Ein Schätzer $\hat{\theta}$ heißt der *Bayes–Schätzer* (unter der a–priori–Verteilung q), wenn das Bayes–Risiko von $\hat{\theta}$ nicht größer ist, als das Bayes–Risiko jedes anderen Schätzers $\tilde{\theta}$, d.h. wenn
$$B_q(\hat{\theta}) = \inf_{\tilde{\theta}} B_q(\tilde{\theta}).$$

Annahme: Es gibt ein σ-endliches Maß λ auf $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$, sodass alle Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$, absolut stetig bzgl. λ sind. Die Dichte von $\mathbb{P}_\theta$ bzgl. λ heißt die Likelihood–Funktion und wird mit $L(x;\theta)$ bezeichnet.

Wir leiten nun eine alternative Formel für das Bayes–Risiko $B_q(\hat{\theta})$ her. Stellen wir uns vor, dass die Stichprobe $x \in \mathfrak{X}$ bekannt ist. Nach dem Bekanntwerden von x ändert sich unsere Vorstellung über die Verteilung von θ: Die a–posteriori–Dichte von θ bei bekannter Stichprobe x ist gegeben durch

$$q(\theta|x) = \frac{q(\theta)L(x;\theta)}{m(x)}, \quad \text{wobei } m(x) = \int_\Theta L(x;t)q(t)dt. \tag{6.2.1}$$

Dabei ist $m(x)$ die Dichte (bzgl. λ), dass eine Stichprobe $x \in \mathfrak{X}$ bei einem zufälligen und gemäß der a–priori–Dichte q verteilten Parameter θ beobachtet wird.

Definition 6.2.3. Schätzen wir bei einer gegebenen Stichprobe $x \in \mathfrak{X}$ den Parameter θ durch einen Wert $a \in \Theta$, so ist das dadurch entstehende *a–posteriori–Risiko* gegeben durch

$$r(a|x) = \int_\Theta D(\theta, a)q(\theta|x)d\theta.$$

Insbesondere definieren wir das *a–posteriori–Risiko eines Schätzers* $\hat{\theta} : \mathfrak{X} \to \Theta$ gegeben die Stichprobe $x \in \mathfrak{X}$ als

$$r(\hat{\theta}|x) = r(\hat{\theta}(x)|x) = \int_\Theta D(\theta, \hat{\theta}(x))q(\theta|x)d\theta.$$

Der nächste Satz besagt, dass wir das Bayes–Risiko berechnen können, indem wir das a–posteriori–Risiko über alle möglichen Stichproben $x \in \mathfrak{X}$ integrieren, wobei der Beitrag der Stichprobe x mit der Dichte $m(x)$ gewichtet wird.

Satz 6.2.4. Für das Bayes–Risiko $B_q(\hat{\theta})$ gilt die Formel

$$B_q(\hat{\theta}) = \int_{\mathfrak{X}} r(\hat{\theta}|x)m(x)\lambda(dx).$$

Beweis. Mit der Definition von $B_q(\hat{\theta})$ gilt

$$B_q(\hat{\theta}) = \int_\Theta \mathbb{E}_\theta D(\theta, \hat{\theta}(X))q(\theta)d\theta = \int_\Theta \int_{\mathfrak{X}} D(\theta, \hat{\theta}(x))L(x;\theta)q(\theta)\lambda(dx)d\theta,$$

wobei wir die Formel

$$\mathbb{E}_\theta D(\theta, \hat{\theta}(X)) = \int_{\mathfrak{X}} D(\theta, \hat{\theta}(x))L(x;\theta)\lambda(dx)$$

benutzt haben. Indem wir nun (6.2.1) und danach den Satz von Fubini benutzen, erhalten wir

$$B_q(\hat{\theta}) = \int_\Theta \int_{\mathfrak{X}} D(\theta, \hat{\theta}(x)) q(\theta|x) m(x) \lambda(dx) d\theta = \int_{\mathfrak{X}} \int_\Theta D(\theta, \hat{\theta}(x)) q(\theta|x) m(x) d\theta \lambda(dx).$$

Mit Definition 6.2.3 ergibt sich die Behauptung des Satzes. □

Nun können wir den Bayes–Schätzer sogar berechnen. Bei einer gegebenen Stichprobe $x \in \mathfrak{X}$ muss man den Wert $a \in \Theta$ finden, der das a–posteriori–Risiko $r(a|x)$ minimiert. Dieser Wert ist dann der Bayes–Schätzer.

Satz 6.2.5. Für alle $x \in \mathfrak{X}$ sei

$$\hat{\theta}(x) = \arg\min_{a \in \Theta} r(a|x) = \arg\min_{a \in \Theta} \int_\Theta D(\theta, a) q(\theta|x) d\theta.$$

Dann ist $\hat{\theta}$ ein Bayes–Schätzer von θ zur a–priori–Verteilung q.

Beweis. Aus der Definition von $\hat{\theta}(x)$ folgt, dass $r(a|x) \geq r(\hat{\theta}(x)|x)$ für alle $a \in \Theta$. Sei $\tilde{\theta} : \mathfrak{X} \to \Theta$ ein Schätzer von θ. Mit Satz 6.2.4 gilt

$$B_q(\tilde{\theta}) = \int_{\mathfrak{X}} r(\tilde{\theta}(x)|x) m(x) \lambda(dx) \geq \int_{\mathfrak{X}} r(\hat{\theta}(x)|x) m(x) \lambda(dx) = B_q(\hat{\theta}).$$

Somit ist $\hat{\theta}$ ein Bayes–Schätzer. □

Korollar 6.2.6. Sei $\Theta \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und betrachte die quadratische Verlustfunktion $D(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$. Dann ist der Bayes–Schätzer gegeben durch den Erwartungswert der a–posteriori–Verteilung, d.h.

$$\hat{\theta}(x) = \int_\Theta \theta q(\theta|x) d\theta.$$

Fassen wir θ als Zufallselement mit Werten in Θ und Dichte q, so können wir auch schreiben

$$\hat{\theta}(x) = \mathbb{E}[\theta | X = x].$$

Beweis. Gemäß Satz 6.2.5 müssen wir die folgende Funktion minimieren:

$$f(a) = \int_\Theta (\theta - a)^2 q(\theta|x) d\theta = \mathbb{E}[(Z-a)^2], \quad a \in \Theta,$$

wobei Z eine Zufallsvariable mit der Dichte $q(\theta|x)$ sei. Es ist eine Übung zu zeigen, dass das Minimum von $\mathbb{E}[(Z-a)^2]$ für $a = \mathbb{E}Z$ erreicht wird. □

Korollar 6.2.7. Sei $\Theta \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und betrachte die Verlustfunktion $D(\theta, \hat{\theta}) = |\theta - \hat{\theta}|$. Dann ist der Bayes–Schätzer gegeben durch den Median der a–posteriori–Verteilung, d.h. $\hat{\theta}(x)$ ist die Lösung von

$$\int_{-\infty}^{\hat{\theta}(x)} q(\theta|x)d\theta = \frac{1}{2},$$

wobei wir hier die Schwierigkeiten ignorieren, die wegen Nichtexistenz oder Nichteindeutigkeit der Lösung entstehen können.

Beweis. Laut Satz 6.2.5 müssen wir die folgende Funktion minimieren:

$$f(a) = \int_{\Theta} |\theta - a| q(\theta|x) d\theta = \mathbb{E}|Z - a|, \quad a \in \Theta,$$

wobei Z eine Zufallsvariable mit der Dichte $q(\theta|x)$ sei. Das Minimum von $\mathbb{E}|Z - a|$ wird erreicht, wenn a der Median von Z ist (Übung). □

6.3. Konstruktion des Minimax–Schätzers

Nun werden wir einen Zusammenhang zwischen den Bayes–Schätzern und dem Minimax–Schätzer herstellen.

Satz 6.3.1. Sei $\hat{\theta}$ der Bayes–Schäzer, der einer a–priori–Verteilung $q(\theta)$ entspricht. Falls

$$R(\theta; \hat{\theta}) \leq B_q(\hat{\theta}) \text{ für alle } \theta \in \Theta,$$

dann ist $\hat{\theta}$ ein Minimax–Schätzer.

Beweis. Sei $\hat{\theta}$ nicht minimax. Dann gibt es einen anderen Schätzer $\hat{\theta}_0$ mit

$$\sup_{\theta \in \Theta} R(\theta; \hat{\theta}_0) < \sup_{\theta \in \Theta} R(\theta; \hat{\theta}).$$

Nun ist aber der Erwartungswert einer Zufallsvariable immer kleiner als ihr Maximum:

$$B_q(\hat{\theta}_0) = \int_{\Theta} R(\theta; \hat{\theta}_0) q(\theta) d\theta \leq \sup_{\theta \in \Theta} R(\theta; \hat{\theta}_0).$$

Es folgt aus den obigen Ungleichungen, dass

$$B_q(\hat{\theta}_0) < \sup_{\theta \in \Theta} R(\theta; \hat{\theta}) \leq B_q(\hat{\theta}),$$

wobei wir die Voraussetzuing benutzt haben. Dies ist ein Widerspruch, denn wir haben vorausgesetzt, dass $\hat{\theta}$ ein Bayes–Schätzer ist. □

Bemerkung 6.3.2. Die Verteilung q aus Satz 6.3.1 heißt die *ungünstigste a–priori–Verteilung* für den Schätzer $\hat{\theta}$, denn für jede andere a–priori–Verteilung $q_0(\theta)$ gilt

$$B_{q_0}(\hat{\theta}) = \int_{\Theta} R(\theta; \hat{\theta}) q_0(\theta) d\theta \leq \int_{\Theta} B_q(\hat{\theta}) q_0(\theta) d\theta = B_q(\hat{\theta}).$$

Somit ist die Qualität des Schätzers $\hat{\theta}$ unter der a–priori–Verteilung schlechter, als unter jeder anderen a–priori–Verteilung q_0.

Satz 6.3.3. Sei $\hat{\theta}$ ein Bayes–Schätzer für die a–priori–Verteilung $q(\theta)$ mit

$$C := R(\theta; \hat{\theta}) = \text{const für alle } \theta \in \Theta.$$

Dann ist $\hat{\theta}$ minimax.

Beweis. Für das Bayes–Risiko von $\hat{\theta}$ gilt

$$B_q(\hat{\theta}) = \int_\Theta R(\theta; \hat{\theta}) q(\theta) d\theta = C \int_\Theta q(\theta) d\theta = C \geq R(\theta; \hat{\theta}) \text{ für alle } \theta \in \Theta.$$

Nun folgt die Behauptung aus Satz 6.3.1. □

Beispiel 6.3.4. Seien $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Bern}(\theta)$ unabhängig, wobei $\theta \in [0, 1]$. Die Verlustfunktion sei quadratisch. Wir haben bereits gesehen, dass die Risikofunktion des Schätzers

$$\hat{\theta}_2 = \frac{S_n + \frac{1}{2}\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}}$$

nicht von θ abhängt. Außerdem ist $\hat{\theta}_2$ der Bayes–Schätzer, wenn wir $\mathrm{Beta}(\frac{1}{2}\sqrt{n}, \frac{1}{2}\sqrt{n})$ als a–priori–Verteilung wählen, s. Beispiel **??**. Somit ist $\hat{\theta}_2$ ein Minimax–Schätzer. Die ungünstigste a–priori–Verteilung ist in diesem Modell die Beta–Verteilung

$$\mathrm{Beta}\left(\frac{1}{2}\sqrt{n}, \frac{1}{2}\sqrt{n}\right).$$

Der konventionelle Schätzer $\bar{X}_n$ ist erstaunlicherweise nicht minimax für die quadratische Verlustfunktion. Damit $\bar{X}_n$ minimax wird, muss man eine unkonventionelle Verlustfunktion betrachten.

Aufgabe 6.3.5. Seien $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Bern}(\theta)$ unabhängig und identisch verteilt, wobei $\theta \in (0, 1)$. Betrachten Sie die Verlustfunktion

$$D(\theta, \hat{\theta}) = \frac{(\theta - \hat{\theta})^2}{\theta(1 - \theta)}.$$

(a) Bestimmen Sie das Risiko des Schätzers $\hat{\theta} = \overline{X}_n$ als Funktion von θ.
(b) Zeigen Sie, dass $\overline{X}_n$ der Bayes-Schätzer von θ für die a-priori-Dichte $q(\theta) = \mathbb{1}_{[0,1]}(\theta)$ ist.
(c) Zeigen Sie, dass $\overline{X}_n$ der Minimax-Schätzer von θ für die angegebene Verlustfunktion D ist.

Aufgabe 6.3.6. Seien $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(\theta, 1)$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, wobei $\theta \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Verlustfunktion $D(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$. Zeigen Sie, dass $\bar{X}_n$ der Minimax-Schätzer von θ ist, wie folgt:

(a) Bestimmen Sie den Bayes–Schätzer $\tilde{\theta}$ von θ für die a–priori–Verteilung $\mathrm{N}(0, c^2)$, wobei $c > 0$ sei.
(b) Bestimmen Sie das Bayes–Risiko dieses Schätzers und zeigen Sie damit, dass fur einen beliebigen Schätzer $\hat{\theta}$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} R(\theta; \hat{\theta}) \geq \frac{1}{n}.$$

(c) Folgern Sie, dass $\bar{X}_n$ der Minimax–Schätzer von θ ist.

Aufgabe 6.3.7. Sei $X \sim \mathrm{N}(\theta, 1)$ (d.h. die Stichprobe besteht aus einem Element), wobei der Parameterraum $\Theta := [-m, m]$ mit $0 < m < 1$ sei. Die Verlustfunktion sei quadratisch, d.h. $D(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$.

(a) Betrachten Sie die a–priori–Verteilung (keine Dichte!) μ mit $\mu(\{-m\}) = \mu(\{+m\}) = 1/2$ und beweisen Sie für den entsprechenden Bayes–Schätzer die Formel

$$\hat{\theta}(x) = m \tanh(mx), \qquad \text{wobei } \tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}.$$

(b) Zeigen Sie, dass für diesen Schätzer $R(\theta; \hat{\theta}) \leq B_\mu(\hat{\theta})$ gilt und dass das Risiko $R(\theta; \hat{\theta})$ nicht konstant ist.

(c) Folgern Sie, dass $\hat{\theta}$ ein Minimax–Schätzer ist.

6.4. Statistik als Zweipersonenspiel

Es gibt eine interessante Interpretation der statistischen Entscheidungstheorie als ein Zweipersonenspiel. Man betrachte ein Spiel mit zwei Spielern A und B. Spieler A habe Strategien $A_1, \dots, A_m$ zur Verfüging, während die möglichen Strategien des Spielers B mit $B_1, \dots, B_n$ bezeichnet seien. In jeder Runde des Spiels wählt jeder Spieler unabhängig vom anderen Spieler eine der ihm zur Verfügung stehenden Strategien. Wählt A Strategie A_i und B Strategie B_j, so sei der Gewinn von A in der entsprechenden Runde gleich u_{ij} (wobei diese Zahl auch negativ sein darf). Das Spiel wird also durch die Matrix (u_{ij}) eindeutig beschrieben, die auch die *Auszahlungsmatrix* genannt wird. Das Ziel von A ist es, seinen Gewinn zu maximieren. Im Gegenteil ist Spieler B bestrebt, den Gewinn von A zu minimieren.

Beispiel 6.4.1. Beim Spiel “Schere, Stein, Papier, Brunnen” hat jeder der beiden Spieler die 4 genannten Strategien zur Verfügung. Die Regeln sind wie folgt: Stein schlägt Schere, Papier schlägt Stein, Brunnen schlägt Stein, Schere schlägt Papier, Brunnen schlägt Schere und Papier schlägt Brunnen. Der Gewinn ist bei verschiedenen Symbolen gleich ± 1. Bei gleichen Symbolen ist der Gewinn 0. Die Auszahlungsmatrix sieht somit folgendermaßen aus:

		Spieler B			
		Schere	Stein	Papier	Brunnen
	Schere	0	-1	$+1$	-1
Spieler A	Stein	$+1$	0	-1	-1
	Papier	-1	$+1$	0	$+1$
	Brunnen	$+1$	$+1$	-1	0

Das Spiel besteht aus unendlich vielen Runden. Am obigen Beispiel sieht man, dass es ungünstig ist, sich für eine Strategie zu entscheiden, und diese immer zu verwenden (dieses Vorgehen nennt man *reine Strategie*). Spielt z.B. einer der Spieler immer Schere, so merkt das der andere Spieler nach einigen Runden und antwortet dann mit Stein. Günstiger ist es, eine *gemischte Strategie* zu verwenden, bei der in jeder Runde eine der vier Strategien zufällig ausgewählt wird.

Definition 6.4.2. Eine gemischte Strategie von A ist ein Vektor $x = (x_1, \ldots, x_m)$ mit $x_1 + \ldots + x_m = 1$ und $x_1, \ldots, x_m \geq 0$. Eine gemischte Strategie von B ist ein Vektor $y = (y_1, \ldots, y_n)$ mit $y_1 + \ldots + y_n = 1$ und $y_1, \ldots, y_n \geq 0$.

Interpretation: A wählt Strategie A_i mit Wahrscheinlichkeit x_i; B wählt Strategie B_j mit Wahrscheinlichkeit y_j. Da die Spieler unabhängig voneinander agieren, ist der erwartete Gewinn von A gegeben durch

$$G(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_{ij} x_i y_j.$$

Aufgabe 6.4.3. Nehmen wir an, B spielt die "naive" gemischte Strategie $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Welche gemischte Strategie ist für A optimal?

Wir betrachten nun das Spiel aus Sicht der beiden Spieler.

A denkt: Angenommen, ich wähle eine gemischte Strategie x. Nach genügend vielen Runden wird B meine Strategie erkennen und seinerseits eine gemischte Strategie y benutzen, die $G(x,y)$ minimiert. Ich muss also das folgende Optimierungsproblem lösen:

Bestimme x, das $\min_y G(x,y)$ maximiert.

B denkt: Angenommen, ich wähle eine gemischte Strategie y. Nach genügend vielen Runden wird A meine Strategie erkennen und seinerseits eine gemischte Strategie x benutzen, die $G(x,y)$ maximiert. Ich muss also das folgende Optimierungsproblem lösen:

Bestimme y, das $\max_x G(x,y)$ minimiert.

Es stellt sich heraus, dass die Lösungen der beiden Probleme, die *Maximin* und *Minimax* heißen, übereinstimmen.

Satz 6.4.4 (von Neumann, 1928)**.** Es gilt

$$\max_{\substack{x_1 \ldots, x_m \geq 0 \\ x_1 + \ldots + x_m = 1}} \min_{\substack{y_1 \ldots, y_n \geq 0 \\ y_1 + \ldots + y_n = 1}} G(x,y) = \min_{\substack{y_1 \ldots, y_n \geq 0 \\ y_1 + \ldots + y_n = 1}} \max_{\substack{x_1 \ldots, x_m \geq 0 \\ x_1 + \ldots + x_m = 1}} G(x,y).$$

Definition 6.4.5. Ein Paar von gemischten Strategien (x^*, y^*) heißt *Nash–Gleichgewicht*, wenn keiner der beiden Spieler seine Position durch einseitiges Abweichen von seiner gemischten Strategie verbessern kann, d.h.

- Für jede gemischte Strategie x von A gilt $G(x, y^*) \leq G(x^*, y^*)$.
- Für jede gemischte Strategie y von B gilt $G(x^*, y) \geq G(x^*, y^*)$.

Aufgabe 6.4.6. Zeigen Sie, dass im Spiel "Schere, Stein, Papier, Brunnen" das Paar $x^* = y^* = (\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ein Nash–Gleichgewicht bildet.

Aufgabe 6.4.7. Zeigen Sie, dass im Spiel "Schere, Stein, Papier" (ohne Brunnen) das Paar $x^* = y^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ein Nash–Gleichgewicht bildet.

Nun können wir eine Interpretation der statistischen Entscheidungstheorie als Zweipersonenspiel beschreiben. Sei $(\mathfrak{X}, \mathcal{A}, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta})$ ein statistisches Modell und $D : \Theta \times \Theta \to [0, \infty)$ eine Verlustfunktion. Wir betrachten zwei Spieler, die als *Natur* und *Statistiker* bezeichnet werden. Das Spiel verläuft wie folgt. Die Natur wählt ein $\theta \in \Theta$. Gleichzeitig und unabhängig von der Natur wählt der Statistiker einen Schätzer $\hat{\theta} : \mathfrak{X} \to \Theta$. Nachdem das Paar $(\theta, \hat{\theta})$ gewählt wurde, wird eine Stichprobe X gemäß $\mathbb{P}_\theta$ zufällig gezogen und der Gewinn der Natur (bzw. der Verlust des Statistikers) ist $D(\theta, \hat{\theta}(X))$. Bei einem gegebenen Paar $(\theta, \hat{\theta})$ ist der erwartete Gewinn der Natur gegeben durch das Risiko

$$R(\theta; \hat{\theta}) = \mathbb{E}_\theta D(\theta, \hat{\theta}(X)).$$

Die Funktion R ist somit ein Analogon der Auszahlungsmatrix.

Die reinen Strategien der Natur sind alle möglichen Parameter $\theta \in \Theta$. Die Natur kann aber auch eine gemischte Strategie verwenden, die durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß (zur Vereinfachung: Dichte q) auf dem Parameterraum Θ beschrieben wird. Antwortet der Statistiker auf eine solche gemischte Strategie mit einem Schätzer $\hat{\theta}$, so ist sein erwarteter Verlust nichts anderes als das Bayes–Risiko des Schätzers $\hat{\theta}$:

$$B_q(\hat{\theta}) = \int_\Theta R(\theta, \hat{\theta}) q(\theta) d\theta.$$

Die beste Antwort des Statistikers ist also der Bayes–Schätzer.
Die reinen Strategien des Statistikers sind alle möglichen Schätzer. Es ist interessant, dass sich gemischte Strategien für den Statistiker gar nicht lohnen. Stellen wir uns z.B. vor, der Statistiker würde eine gemischte Strategie der folgenden Art einsetzen: Er sucht sich n Schätzer $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n$ aus und wählt dann den Schätzer $\hat{\theta}_j$ mit Wahrscheinlichkeit $y_j \geq 0$, wobei $y_1 + \ldots + y_n = 1$. Sein erwarteter Verlust wäre dann

$$y_1 B_q(\hat{\theta}_1) + \ldots + y_n B_q(\hat{\theta}_n) \geq \min_{j=1,\ldots,n} B_q(\hat{\theta}_j),$$

denn $(y_1, \ldots, y_n)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsvektor. Der Statistiker hätte einfach den Schätzer $\hat{\theta}_j$ mit dem kleinsten Bayes–Risiko benutzen können, der dann mindestens genauso gut wie die gemischte Strategie wäre.

Nun betrachten wir das Geschehen aus Sicht der beiden Spieler.

Natur denkt: Ich wähle eine gemischte Strategie q. Der Statistiker, der ja rational handelt, wird diese Strategie nach mehreren Runden erkennen und mit dem entsprechenden Bayes–Schätzer antworten. Mein Gewinn ist dabei das Bayes–Risiko dieses Schätzers, das ich maximieren möchte. Also muss ich als meine gemischte Strategie die ungünstigste a–priori–Verteilung auswählen!

Statistiker denkt: Gemischte Strategien lohnen sich für mich nicht. Also wähle ich eine reine Strategie, d.h. einen Schätzer $\hat{\theta}$. Die Natur wird diesen Schätzer nach mehreren Runden rekonstruieren können. Sie wird dann mit dem Wert θ antworten, der ihren Gewinn $R(\theta, \hat{\theta})$

maximiert. Mein Verlust ist also gegeben durch das maximale Risiko von $\hat{\theta}$:

$$M(\hat{\theta}) = \sup_{\theta \in \Theta} R(\theta; \hat{\theta}).$$

Somit muss ich denjenigen Schätzer $\hat{\theta}$ wählen, der den Wert $M(\hat{\theta})$ minimiert, also den Minimax–Schätzer!

Handeln beide Seiten rational, so muss das Spiel im Nash–Gleichgewicht verharren: Die Natur wählt θ's zufällig gemäß der ungünstigsten a–priori–Verteilung, während der Statistiker darauf mit dem entsprechenden Bayes–Schätzer antwortet, der gleichzeitig der Minimax–Schätzer ist, s. Abschnitt 6.3.