Prof. Dr. Z. Kabluchko
Philipp Godland

Wintersemester 2016/17
12. Dezember 2016

Mathematische Statistik

Übungsblatt 9

Abgabe: 19. Dezember 2016 (vor der Vorlesung)

Hinweis: Sie dürfen in den Aufgaben die Quantile der Normalverteilung, der χ^2-Verteilung und der F-Verteilung als bekannt voraussetzen.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es seien n Geräte gleicher Bauart gegeben. Die Lebensdauer des Geräts i werde mit einer Zufallsvariable X_i modelliert. Dabei seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\theta > 0$. Es soll ein Konfidenzintervall für die erwartete Lebensdauer $\frac{1}{\theta}$ bestimmt werden.

(a) Zeigen Sie, dass $2n\theta\bar{X}_n$ eine χ^2-Verteilung mit $2n$ Freiheitsgraden hat.

(b) Konstruieren Sie ein Konfidenzintervall zum Niveau $1-\alpha$ für $\frac{1}{\theta}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit der Dichte $h_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}\mathbb{1}_{x\geq\theta}$, wobei $\theta \in \mathbb{R}$ der unbekannte Parameter sei. Als Schätzer für θ betrachten wir $Y = \min\{X_1, \dots, X_n\}$. Finden Sie für ein gegebenes $\alpha \in (0,1)$ Zahlen p und q (die nicht von θ abhängen) mit

$$\mathbb{P}_\theta[\theta < Y + p] = \mathbb{P}_\theta[\theta > Y + q] = \frac{\alpha}{2} \text{ für alle } \theta \in \mathbb{R}.$$

Konstruieren Sie ein Konfidenzintervall zum Niveau $1-\alpha$ für θ.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

(a) Für jedes $r \in \mathbb{N}$ sei Z_r eine χ^2-verteilte Zufallsvariable mit r Freiheitsgraden. Zeigen Sie, dass

$$\frac{Z_r - r}{\sqrt{2r}} \xrightarrow[r\to\infty]{d} N(0,1).$$

(b) Für $\alpha \in (0,1)$ seien z_α und $\chi^2_{r,\alpha}$ die α-Quantile der Standardnormalverteilung $N(0,1)$ bzw. der χ^2_r-Verteilung. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\chi^2_{r,\alpha} - r}{\sqrt{2r}} = z_\alpha.$$

Hinweis: Nutzen Sie Aufgabenteil (a) für (b).

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es seien $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Y_1, \dots, Y_m \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, wobei $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ bekannt seien. Konstruieren Sie ein Konfidenzintervall zum Niveau $1-\alpha$ für σ_1^2/σ_2^2. Dabei sei $\alpha \in (0,1)$.