Prof. Dr. Z. Kabluchko
Philipp Godland

Wintersemester 2016/17
05. Dezember 2016

Mathematische Statistik

Übungsblatt 8

Abgabe: 12. Dezember 2016 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Betrachten Sie die quadratische Verlustfunktion $D(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$. Bestimmen Sie den Bayes-Schätzer und das Bayes-Risiko dieses Schätzers für die folgenden Modelle:

(a) Gegeben $\theta > 0$ seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit $X_1 \sim \mathrm{Poi}(\theta)$. Die a-priori-Verteilung von θ sei durch die Gammaverteilung mit Parametern $\alpha, \lambda > 0$ gegeben.

(b) Gegeben $\theta \in \mathbb{R}$ seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit $X_1 \sim \mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$, wobei $\sigma^2 > 0$ bekannt sei. Die a-priori-Verteilung von θ sei durch die Normalverteilung mit Erwartungswert $a \in \mathbb{R}$ und Varianz $b^2 > 0$ gegeben.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n \sim \mathrm{Bern}(\theta)$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, wobei $\theta \in (0, 1)$. Betrachten Sie die Verlustfunktion

$$D(\theta, \hat{\theta}) = \frac{(\theta - \hat{\theta})^2}{\theta(1-\theta)}.$$

(a) Bestimmen Sie das Risiko des Schätzers $\hat{\theta} = \overline{X}_n$ als Funktion von θ.

(b) Zeigen Sie, dass $\overline{X}_n$ der Bayes-Schätzer von θ für die a-priori-Dichte $q(\theta) = \mathbb{1}_{[0,1]}(\theta)$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\overline{X}_n$ der Minimax-Schätzer von θ für die angegebene Verlustfunktion D ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n \sim \mathrm{N}(\theta, 1)$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, wobei $\theta \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Verlustfunktion $D(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$. Zeigen Sie, dass $\overline{X}_n$ der Minimax-Schätzer von θ ist, wie folgt:

(a) Bestimmen Sie den Bayes-Schätzer $\tilde{\theta}$ von θ für die a-priori-Verteilung $\mathrm{N}(0, c^2)$, wobei $c > 0$ sei. *Hinweis*: Aufgabe 1(b).

(b) Bestimmen Sie das Bayes-Risiko dieses Schätzers und zeigen Sie damit, dass für einen beliebigen Schätzer $\hat{\theta}$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} R(\theta; \hat{\theta}) \geq \frac{1}{n}.$$

(c) Folgern Sie, dass $\overline{X}_n$ der Minimax-Schätzer von θ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$ seien unabhängig und identisch unter $\mathbb{P}_\theta$ verteilt und $(\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n))_{n \geq 1}$ sei eine Folge von Schätzern für den Parameter θ, für die gilt

(a) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)) = \theta$ für alle $\theta \in \Theta$ (die Folge ist asymptotische erwartungstreu),

(b) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)) = 0$ für alle $\theta \in \Theta$.

Zeigen Sie, dass für jedes $\theta \in \Theta$ diese Folge in Wahrscheinlichkeit (unter $\mathbb{P}_\theta$) gegen den tatsächlichen Parameter θ konvergiert (schwache Konsistenz).

Nikolausaufgabe 1 (5 Bonuspunkte)

Sie spielen gegen den Nikolaus Schere, Stein, Papier, Brunnen. Sie sind Spieler A und der Nikolaus ist Spieler B. Kurze Erläuterung: Stein schlägt Schere, Papier schlägt Stein, Brunnen schlägt Stein, Schere schlägt Papier, Brunnen schlägt Schere und Papier schlägt Brunnen. Der Gewinn ist dabei immer 1. Bei gleichen Symbolen ist der Gewinn 0. Das Spiel wird unendlich oft wiederholt.

(a) Angenommen Spieler A spielt die naive gemischte Strategie $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ in der Reihenfolge (Stein, Schere, Papier, Brunnen). Nachdem B das verstanden hat, welche Strategie wählt dann B um den Gewinn von A zu minimieren? Geben Sie alle optimalen gemischten Strategien an.

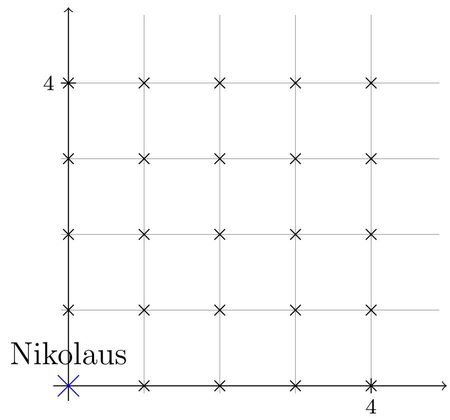
(b) Angenommen Spieler B hat die Strategie $(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gewählt. Wie reagiert A darauf, um seinen Gewinn zu maximieren?

(c) Seien $x_0 = y_0 = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Zeigen Sie, dass (x_0, y_0) das *Nash-Gleichgewicht* für das Spiel bildet.

Nikolausaufgabe 2 (5 Bonuspunkte)

Der Nikolaus steht an einer der äußeren Ecken eines quadratischen Waldes und blickt in diesen hinein. Der Wald befinde sich auf dem Gitter $\{0, \dots, Q\}^2$, sodass auf jedem Gitterpunkt genau ein Baum steht. Sei $N(Q)$ die Anzahl der Bäume in einem solchen Wald mit Seitenlänge $Q \in \mathbb{N}$, die der Nikolaus sehen kann (die Bäume sind unendlich dünn). In der Abbildung ist die Szene für $Q = 4$ dargestellt, der Nikolaus steht im Ursprung und sieht zum Beispiel den Baum an der Stelle $(2, 4)$ nicht. Zeigen Sie, dass für den asymptotischen Anteil der Bäume, die der Nikolaus sehen kann, gilt

$$\lim_{Q\to\infty} \frac{N(Q)}{Q^2} = \frac{6}{\pi^2}.$$



Nikolausaufgabe 3 (5 Bonuspunkte)

Der Nikolaus spielt mit Ihnen das folgende Spiel: Er hat bereits n-mal gewürfelt ($n \geq 5$ und bekannt) und er zeigt Ihnen nacheinander die geworfenen Augenzahlen. Sie können nach jeder gezeigten Augenzahl aussteigen. Ihr Ziel ist es nun, bei der letzten geworfenen 6 auszusteigen. Gelingt Ihnen das, werden Sie mit Schoko-Nikoläusen überhäuft. Wird noch eine weitere 6 aufgedeckt, nachdem Sie ausgestiegen sind, so verlieren Sie das Spiel. Entwickeln Sie eine Strategie, die die Wahrscheinlichkeit maximiert, bei der letzten 6 auszusteigen.