Prof. Dr. Z. Kabluchko
Philipp Godland

Wintersemester 2016/17
28. November 2016

Mathematische Statistik

Übungsblatt 7

Abgabe: 05. Dezember 2016 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit

(a) $X_i \sim \mathrm{Poi}(\theta)$, wobei $\theta > 0$ unbekannt ist.

(b) $X_i \sim \mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$, wobei $\theta \in \mathbb{R}$ unbekannt ist und $\sigma^2 > 0$ bekannt sei.

Berechnen Sie die Fisher–Information $I(\theta)$ und zeigen Sie, dass in beiden Fällen der Schätzer $\bar{X}_n$ erwartungstreu für θ und Cramér-Rao-effizient ist. Er ist damit der beste erwartungstreue Schätzer für θ.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $n \geq 3$ und $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathrm{Exp}(\theta)$, wobei $\theta > 0$ unbekannt sei.

(a) Zeigen Sie, dass $\bar{X}_n$ ein erwartungstreuer Schätzer für $1/\theta$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $1/\bar{X}_n$ *kein* erwartungstreuer Schätzer für θ ist und bestimmen Sie eine Konstante c (in Abhängigkeit von n), so dass $c/\bar{X}_n$ ein erwartungstreuer Schätzer für θ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $c/\bar{X}_n$ nicht Cramér-Rao-effizient ist.

(d) Zeigen Sie, dass $c/\bar{X}_n$ der beste erwartungstreue Schätzer für θ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $Y = (Y_1, Y_2)$ 2-dimensional normalverteilt mit den Parametern $\mu = (\mu_1, \mu_2)^T$ und $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ positiv definit, d.h. mit der gemeinsamen Dichte

$$f(y_1, y_2) \;=\; \frac{1}{2\pi \det(\Sigma)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}((y_1, y_2) - \mu^T)\Sigma^{-1}((y_1, y_2)^T - \mu) \right).$$

Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von Y_1 gegeben $Y_2 = a$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Betrachten Sie die folgenden beiden Schätzer für $\theta := e^{-\lambda}$:

$$\hat{\theta}_n^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i = 0\}}, \quad \hat{\theta}_n^{(2)} = e^{-\overline{X}_n}.$$

(a) Sind diese Schätzer erwartungstreu/asymptotisch erwartungstreu?

(b) Zeigen Sie, dass beide Schätzer asymptotisch normal verteilt sind und bestimmen Sie die asymptotische relative Effizienz. Welcher Schätzer ist im Sinne der asymptotischen relativen Effizienz besser?