Prof. Dr. Z. Kabluchko
Philipp Godland

Wintersemester 2016/17
21. November 2016

Mathematische Statistik

Übungsblatt 6

Abgabe: 28. November 2016 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Betaverteilungen $\{\text{Beta}(\alpha,\beta) : (\alpha,\beta) \in (0,\infty)^2\}$ und die Gammaverteilungen $\{\text{Gamma}(\alpha,\lambda) : (\alpha,\lambda) \in (0,\infty)^2\}$ zweiparametrige Exponentialfamilien bilden.

(b) Es seien $X_1,\ldots,X_n$ unabhängig Gamma(α,λ)-verteilt, $\alpha,\lambda > 0$ seien unbekannt. Bestimmen Sie eine suffiziente und vollständige Statistik und nutzen Sie diese, um den besten erwartungstreuen Schätzer für $\frac{\alpha}{\lambda}$ zu bestimmen.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Es sei $Y = (Y_1, Y_2)$ 2-dimensional normalverteilt mit den Parametern $\mu = (0,0)^T$ und $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ positiv definit, d.h. mit der gemeinsamen Dichte

$$f(y_1,y_2) \;=\; \frac{1}{2\pi \det(\Sigma)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y_1,y_2)\Sigma^{-1}(y_1,y_2)^T\right).$$

(a) Seien $(X_1^{(1)}, X_1^{(2)}), \ldots, (X_n^{(1)}, X_n^{(2)})$ unabhängig und identisch wie Y verteilt, dabei sei Σ unbekannt. Bestimmen Sie eine suffiziente und vollständige Statistik.

(b) Bestimmen Sie den besten erwartungstreuen Schätzer für $\sigma_{12} = \text{Cov}_{\mathbf{0},\Sigma}(X_1^{(1)}, X_1^{(2)})$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Es seien $X_1,\ldots,X_n$ unabhängig und identisch Poi(θ)-verteilt und $S_n := X_1 + \ldots + X_n$. Zeigen Sie, dass der beste erwartungstreue Schätzer für

$$\nu_k = e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!} = \mathbb{P}_\theta[X_1 = k], \quad k \in \mathbb{N}_0$$

durch

$$\hat{\nu}_{k,n} := \binom{S_n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{S_n - k} \mathbb{1}_{S_n \geq k}$$

gegeben ist. Zeigen Sie auch, dass $\hat{\nu}_{k,n}$ eine stark konsistente Folge von Schätzern für ν_k ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es seien $X_1,\ldots,X_n$ unabhängig und identisch Gamma(α,λ)-verteilt, wobei $\theta = (\alpha,\lambda) \in (0,\infty)^2$. Zeigen Sie:

(a) $Y \sim \text{Gamma}(\alpha,\lambda),\ (\alpha,\lambda) \in (0,\infty)^2 \Rightarrow \lambda Y \sim \text{Gamma}(\alpha, 1)$.

(b) $\overline{X}_n$ und $(X_k / \sum_{i=1}^n X_i)_{1\leq k\leq n}$ sind unabhängig unter jedem $\mathbb{P}_\theta$.

(c) $\overline{X}_n$ und $(\prod_{k=1}^n X_k)^{1/n} / \overline{X}_n$ sind unabhängig unter jedem $\mathbb{P}_\theta$.

(d) $\mathbb{E}_\theta\left[(X_k / \sum_{i=1}^n X_i)\right] = \frac{1}{n}$.