Prof. Dr. Z. Kabluchko
Philipp Godland

Wintersemester 2016/17
14. November 2016

Mathematische Statistik

Übungsblatt 5

Abgabe: 21. November 2016 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Es sei $\Theta = (0, \infty)$ und X habe unter $\mathbb{P}_\theta$ die Zähldichte

$$\mathbb{P}_\theta(X = n) \;=\; \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} \frac{\theta^n}{n!}$$

für alle $\theta \in \Theta, n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie für $\gamma(\theta) = e^{-\theta}$ alle erwartungstreuen Schätzer, d.h. alle Funktionen $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{E}_\theta[g(X)] = \gamma(\theta)$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

(a) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen, die auf einem Intervall (θ_1, θ_2) gleichverteilt sind. Dabei seien $\theta_1 \in \mathbb{R}$ und $\theta_2 \in \mathbb{R}$ die zu schätzenden Parameter mit $\theta_1 < \theta_2$. Zeigen Sie die Suffizienz der Statistik

$$T(x_1, \ldots, x_n) = (x_{(1)}, x_{(n)}).$$

(b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verschoben exponentialverteilt, d.h. verteilt gemäß der Dichte

$$h_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}} \mathbb{1}_{[\mu,\infty)}(x),$$

$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Zeigen Sie die Suffizienz der Statistiken

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \left(x_{(1)}, \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \quad \text{und} \quad T'(x_1, \ldots, x_n) = \left(x_{(1)}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{(1)}) \right).$$

Aufgabe 3 (2+2+3 Punkte)

(a) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig $\mathrm{Poi}(\lambda)$-verteilt, $\lambda > 0$ sei der zu schätzende Parameter. Zeigen Sie, dass $T(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$ vollständig ist.

(b) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig $\mathrm{Geo}(\theta)$-verteilt, $\theta \in (0, 1)$ sei der zu schätzende Parameter. Zeigen Sie, dass $T(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$ suffizient und vollständig ist. Sie dürfen benutzen, dass $T(X_1, \ldots, X_n)$ unter $\mathbb{P}_\theta$ negativ binomialverteilt ist mit den Parametern n und θ, d.h. für $k = n, n+1, \ldots$ gilt

$$\mathbb{P}_\theta\left(T(X_1, \ldots, X_n) = k\right) = \binom{k-1}{n-1} \theta^n (1-\theta)^{k-n}.$$

(c) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig $\mathrm{N}(\theta, \theta^2)$-verteilt, $\theta \neq 0$ sei der zu schätzende Parameter. Prüfen Sie, ob die Statistik $T(x_1, \ldots, x_n) = (\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i^2)$ suffizient und vollständig ist.

Aufgabe 4 (1+2+3 Punkte)

Gegeben sei eine Urne mit einer unbekannten Anzahl $N \in \mathbb{N}$ Kugeln, die von 1 bis N durchnumeriert sind. Es werden n Kugeln mit Zurücklegen gezogen und die zugehörigen Nummern $X_1, \ldots, X_n$ notiert. Sie haben bereits gezeigt, dass $T(x_1, \ldots, x_n) := x_{(n)}$ der ML-Schätzer für N ist.

(a) Zeigen Sie, dass T suffizient ist.

(b) Zeigen Sie, dass T vollständig ist.

(c) Konstruieren Sie den besten erwartungstreuen Schätzer für N. Dieser muss nicht unbedingt Werte in $\mathbb{N}$ annehmen.