Prof. Dr. Z. Kabluchko
Philipp Godland

Wintersemester 2016/17
07. November 2016

Mathematische Statistik

Übungsblatt 4

Abgabe: 14. November 2016 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

(a) $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängig und identisch gemäß der Dichte

$$h_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}} \mathbb{1}_{[\mu,\infty)}(x),$$

$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, verteilt. Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer für (μ, σ).

(b) $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängig und identisch gemäß der Dichte

$$h_\mu(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-\mu|}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$\mu \in \mathbb{R}$, verteilt. Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer für μ bzw. beschreiben Sie die Menge aller Parameterwerte, die die Likelihood-Funktion maximieren.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Jeder Mensch gehört zu einem der drei Genotypen AA, Aa oder aa. Das Hardy-Weinberg-Gesetz besagt, dass diese Genotypen mit den Wahrscheinlichkeiten $(1-p)^2$, $2p(1-p)$ und p^2 auftreten, $0 < p < 1$. Eine Blutuntersuchung bei n Personen ergab, dass k Personen dem Genotyp AA, l Personen dem Genotyp Aa und m Personen dem Genotyp aa zuzuordnen waren. Die einzelnen Blutuntersuchungen können als unabhängig angesehen werden.

a) Modellieren Sie die Situation und begründen Sie Ihre Verteilungsannahme.

b) Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer für p.

Aufgabe 3 (3+1 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und mit Parameter $\theta > 0$ Poisson-verteilte Zufallsvariablen.
Zeigen Sie

(a) mithilfe der Definition,

(b) mithilfe des Faktorisierungssatzes von Neyman-Fisher,

dass $T(X_1, \dots, X_n) = X_1 + \ldots + X_n$ eine suffiziente Statistik ist. Welche Verteilung hat $(X_1, \dots, X_n)$ gegeben, dass $T(X_1, \dots, X_n) = t$, $t \in \mathbb{N}_0$?

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei $X \sim \mathrm{Bin}(m, p)$ mit bekanntem $m \in \mathbb{N}$ und unbekanntem $p \in (0, 1)$. Zeigen Sie, dass es keinen erwartungstreuen Schätzer (bei einelementiger Stichprobe) für $\theta = \frac{1}{p}$ gibt.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige, identisch verteilte und quadratisch integrierbare Zufallsgrößen mit unbekannter gemeinsamer Verteilungsfunktion F_θ. Es soll

$$\gamma(\theta) = \mathbb{E}_\theta X_1$$

geschätzt werden. Man bestimme unter allen **erwartungstreuen** Schätzern der Form

$$\hat{\gamma} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad \text{mit } (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$$

einen besten (bez. des mittleren quadratischen Fehlers).