

# Mathematische Statistik

## Übungsblatt 3

Abgabe: 07. November 2016 (vor der Vorlesung)

**Aufgabe 1** (1+2+2 Punkte) Gegeben sei eine Urne mit einer unbekanntem Anzahl  $N \in \mathbb{N}$  Kugeln, die von 1 bis  $N$  durchnummeriert sind. Es werden  $n$  Kugeln mit Zurücklegen gezogen und die zugehörigen Nummern  $X_1, \dots, X_n$  notiert. Beschreiben Sie die Situation durch ein statistisches Experiment und

- (a) bestimmen Sie den Momentenschätzer  $\hat{N}_{ME}$  für  $N$ .
- (b) bestimmen Sie den ML-Schätzer  $\hat{N}_{ML}$  für  $N$ .
- (c) berechnen Sie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_N(\hat{N}_{ML})$ .

**Aufgabe 2** (1+2+1 Punkte)

Es seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig und gleichverteilt auf dem Intervall

- (a)  $[\theta, \theta + 1]$ , wobei  $\theta \in \mathbb{R}$  unbekannt sei.
- (b)  $[\theta_1, \theta_2]$ , wobei  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$  mit  $\theta_1 < \theta_2$  unbekannt seien.
- (c)  $[-\theta, \theta]$ , wobei  $\theta > 0$  unbekannt sei.

Bestimmen Sie den jeweiligen Maximum-Likelihood-Schätzer bzw. beschreiben Sie die Menge aller Parameterwerte, die die Likelihood-Funktion maximieren.

**Aufgabe 3** (3 Punkte) Sei  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}_0^n$  eine Stichprobe der unabhängigen Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$ , wobei  $X_i \sim \text{Bin}(m_i, p)$ . Die  $m_i \in \mathbb{N}$  seien bekannt und  $p \in [0, 1]$  unbekannt. Die  $X_i$  sind nun nicht mehr identisch verteilt. Bestimmen Sie den ML-Schätzer  $\hat{p}_{ML} = \arg \max_{p \in [0, 1]} L(p)$ , wobei hier  $L(p) = \mathbb{P}_p[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$  wie im Falle unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen definiert sei.

**Aufgabe 4** (2+2 Punkte)

Bei einem gegebenen Wert des Parameters  $\lambda > 0$  seien die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig und  $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilt. Dabei wird für  $\lambda$  eine a-priori-Gamma( $\alpha, b$ )-Verteilung angenommen, wobei  $\alpha, b > 0$  und bekannt seien.

- (a) Bestimmen Sie die a-posteriori-Verteilung von  $\lambda$  für die Realisierung  $(x_1, \dots, x_n)$ .
- (b) Bestimmen Sie den Bayes-Schätzer  $\hat{\lambda}_{\text{Bayes}}$  für  $\lambda$ . Ist  $\hat{\lambda}_{\text{Bayes}}(X_1, \dots, X_n)$  stark konsistent für  $\lambda$ ?

**Aufgabe 5** (2+2 Punkte)

Bei einem gegebenen Wert des Parameters  $p \in (0, 1)$  seien die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig und  $\text{Geo}(p)$ -verteilt. Dabei wird für  $p$  eine a-priori-Beta( $\alpha, \beta$ )-Verteilung angenommen, wobei  $\alpha, \beta > 0$  und bekannt seien.

- (a) Bestimmen Sie die a-posteriori-Verteilung von  $p$  für die Realisierung  $(x_1, \dots, x_n)$ .
- (b) Bestimmen Sie den Bayes-Schätzer  $\hat{p}_{\text{Bayes}}$  für  $p$ .