Prof. Dr. Z. Kabluchko
Philipp Godland

Wintersemester 2016/17
23. Januar 2017

Mathematische Statistik

Übungsblatt 13

Abgabe: 30. Januar 2017 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Zähldichte

$$f_\theta(x) := \begin{cases} \theta & \text{für} \quad x = -1 \\ (1-\theta)^2\theta^x & \text{für} \quad x = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

wobei $\theta \in (0, 1)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Statistik

$$T(X) := (T_1(X), T_2(X)) := \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i = -1\}}, \sum_{i=1}^n X_i \cdot \mathbb{1}_{\{X_i \geq 0\}} \right)$$

suffizient für θ ist.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}_\theta T_1(X)$ und $\mathbb{E}_\theta T_2(X)$.

(c) Überprüfen Sie, ob die Statistik T vollständig für θ ist.

(d) Berechnen Sie die Fisher-Information $I(\theta)$.

(e) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

(a) Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilung $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ beide unbekannt sind. Bestimmen Sie einen gleichmäßig besten erwartungstreuen Schätzer für $\gamma_1(\mu, \sigma^2) = \sigma^2 \cdot \mu$.

(b) Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilung $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ unbekannt und $\sigma^2 > 0$ bekannt ist. Bestimmen Sie jeweils einen gleichmäßig besten erwartungstreuen Schätzer für $\gamma_2(\mu) = \mu^2$ und $\gamma_3(\mu) = \mu^3$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Es seien X und Y unabhängige und $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen ($\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ seien unbekannt). Folgern Sie aus dem Satz von Basu, dass $X + Y$ und $X - Y$ unabhängig sind.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Betrachten Sie das Modell $Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$, wobei $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ unabhängig sind, $\beta \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ seien unbekannt. Nach Blatt 12 Aufgabe 2(b) sind die Maximum-Likelihood-Schätzer für β und σ^2 gegeben durch

$$\hat{\beta}(y_1, \dots, y_n) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \text{und} \quad \hat{\sigma}^2(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}(y_1, \dots, y_n) \cdot x_i)^2$$

Bestimmen Sie symmetrische Konfidenzintervalle zum Niveau $1 - \xi$ für β und σ^2.