Prof. Dr. Z. Kabluchko
Philipp Godland

Wintersemester 2016/17
16. Januar 2017

Mathematische Statistik

Übungsblatt 12

Abgabe: 23. Januar 2017 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Ein Hersteller von Smartphones wirbt für sein neues Modell mit der Behauptung, dass der Akku bei Vollbelastung durchschnittlich nicht weniger als 1000 Minuten hält. Bei einer Überprüfung von 100 Smartphones dieses Typs wird festgestellt, dass der Akku bei Vollbelastung im Mittel nach 915 Minuten leer ist. Die Situation lässt sich darstellen durch $n = 100$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$ unbekannt, die jeweils die Lebensdauer einer Akkuladung beschreiben. Die Hypothese, dass der Hersteller Recht hat, soll gegen die Alternativhypothese, dass er unrecht hat, getestet werden.

(a) Beschreiben Sie die Situation durch ein geeignetes einseitiges Testproblem und bestimmen Sie in diesem den gleichmäßig besten Test zum Niveau $\alpha = 0.1$. Lässt sich die Hypothese, dass der Hersteller Recht hat, zum Niveau $\alpha = 0.1$ verwerfen?

(b) Ab welchem Niveau ist dies möglich?

Hinweis: Sie dürfen die Vertafelung der Quantile der χ^2_n-Verteilung benutzen.

	β						
n	0.900	0.500	0.200	0.100	0.050	0.025	0.010
80	96.58	79.33	69.21	64.28	60.39	57.15	53.54
90	107.57	89.33	78.56	73.29	69.13	65.65	61.75
100	118.50	99.33	87.95	82.36	77.93	74.22	70.06
150	172.58	149.33	135.26	128.28	122.69	117.98	112.67
200	226.02	199.33	183.01	174.84	168.28	162.73	156.43

Tabelle 1: Quantile $\chi^2_{n,\beta}$ der χ^2_n-Verteilung

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Ein Physiker möchte den elektrischen Leitwert β (β ist der Kehrwert des Widerstands R) eines Leiters messen. Er legt die Spannungen $x_1, \dots, x_n$ an und misst die Stromstärken $y_1, \dots, y_n$. Gehen Sie davon aus (Ohm'sches Gesetz), dass

$$y_i = \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ die Messfehler sind.

(a) Schätzen Sie β mit der Methode der kleinsten Quadrate.

(b) Fassen Sie $y_1, \dots, y_n$ als Realisierungen der Zufallsvariablen

$$Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

auf. Dabei sei β unbekannt, $x_1, \dots, x_n$ bekannt und $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ unabhängig und identisch $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$-verteilt, wobei auch $\sigma^2 > 0$ unbekannt sei. Schätzen Sie β und σ^2 mit der Maximum-Likelihood-Methode.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Betrachten Sie folgende Form des Modells aus Aufgabe 2:

$$Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

Dabei sei β unbekannt, $x_1, \dots, x_n$ bekannt und $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ paarweise unkorrelierte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und unbekannter Varianz $\sigma^2 > 0$.

(a) Bestimmen Sie den besten linearen erwartungstreuen Schätzer $\hat{\beta}$ für β.

(b) Betrachten Sie den naiven Schätzer

$$\overline{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{x_i}.$$

Zeigen Sie, dass $\overline{\beta}$ linear und erwartungstreu ist. Bestimmen Sie die Varianz von $\overline{\beta}$ und zeigen Sie ohne Benutzung der Tatsache, dass $\hat{\beta}$ ein bester linearer erwartungstreuer Schätzer für β ist, dass $\operatorname{Var}_{(\beta,\sigma^2)} \hat{\beta} \leq \operatorname{Var}_{(\beta,\sigma^2)} \overline{\beta}$.

(c) Konstruieren Sie einen erwartungstreuen Schätzer für σ^2.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Für feste (und bekannte) Werte $x_1, \dots, x_n$ seien $y_1, \dots, y_n$ Realisierungen von unabhängigen Zufallsvariablen

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ unabhängige Zufallsvariablen seien mit $\varepsilon_i \sim \mathrm{N}(0, k_i \sigma^2)$. Dabei seien $k_1, \dots, k_n > 0$ bekannt und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ unbekannt. Bestimmen Sie eine suffiziente Statistik.