Prof. Dr. Z. Kabluchko
Philipp Godland

Wintersemester 2016/17
19. Dezember 2016

Mathematische Statistik

Übungsblatt 10

Abgabe: 09. Januar 2017 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei W_0 und W_1 zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$. Sei φ^* ein gleichmäßig bester Test zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ für die Nullhypothese W_0 gegen die Alternativhypothese W_1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}_1[\varphi^*(X)] \geq \alpha$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Anlässlich der Show "Wetten, dass..?" wettet Herr Müller, dass er die Farben zweier Filzstifte durch Ablecken eines mit ihnen gemalten Strichs auf einem Blatt Papier erkennen kann. Er weiß, dass von den 10 bemalten Papieren genau 5 mit dem roten und 5 mit dem blauen Filzstift bemalt wurden. Testen Sie die Hypothese H_0 : "er kann es nicht" gegen die Alternativhypothese H_1 : "er kann es". Verwenden Sie dazu die Statistik $X \in \{0, \dots, 5\}$, die die Anzahl der richtig zugeordneten roten Striche angibt. Bestimmen Sie damit einen kritischen Wert c, sodass $\varphi(x) = \mathbb{1}_{\{x \geq c\}}$ ein Test zum Niveau ≤ 0.01 ist, d.h. eine Anzahl richtig zugeordneter roter Striche, ab der man bereit ist zum Niveau ≤ 0.01 zu akzeptieren, dass Herr Müller diese Gabe tatsächlich besitzt.

Hinweis: Bestimmen Sie die Verteilung von X unter der Hypothese, dass Herr Müller die Farben in Wirklichkeit nicht auseinanderhalten kann und nur rät.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und auf $[0, \theta]$ gleichverteilte Zufallsvariablen, wobei $\theta > 0$ der unbekannte Parameter sei. Für $c > 0$ sei $\varphi_c : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ definiert durch

$$\varphi_c(x_1, ..., x_n) = \mathbb{1}_{\{M_n \geq c\}}(x_1, ..., x_n),$$

wobei $M_n(x_1, ..., x_n) := \max\{x_1, ..., x_n\}$.

(a) Bestimmen Sie die Gütefunktion $\mathbb{E}_\theta[\varphi_c(X_1, \dots, X_n)]$ von φ_c, und zeigen Sie, dass diese monoton wachsend in θ ist.

(b) Es seien $H_0 = (0, 1/2]$ und $H_1 = (1/2, \infty)$. Bestimmen Sie c so, dass die maximale Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art gleich 0.05 ist. Wie groß muss für den so erhaltenen Test $n \in \mathbb{N}$ gewählt werden, damit für $\theta = 3/4$ die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art höchstens 0.02 beträgt?

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Die Anzahl von Zerfällen pro Gramm und Minute bei radioaktiven Substanzen ist Poi(λ)-verteilt, wobei λ ein substanzspezifischer Parameter ist. Es soll festgestellt werden, ob es sich bei einer unbekannten radioaktiven Substanz um den Stoff A mit $\lambda_0 = 0{,}5$ Zerfällen pro Gramm und Minute oder um den Stoff B mit $\lambda_1 = 0{,}25$ Zerfällen pro Gramm und Minute handelt. Ein Geigerzähler registriert bei einer Stoffmasse von 2 Gramm in 10 Minuten 5 Zerfälle. Es soll überprüft werden, ob die Hypothese H_0 : "Es handelt sich um Stoff A" zum Niveau 0.05 verworfen werden kann.

(a) Welche Entscheidung trifft der gleichmäßig beste Test bei dieser Beobachtung?

(b) Bestimmen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Entscheidung "Es handelt sich um Stoff A" fälschlicherweise getroffen wird.

Hinweis: Benutzen Sie die Vertafelung der Verteilungsfunktion der Poissonverteilung in Tabelle 1.

	λ							
k	2	4	5	6	8	10	12	14
0	0.1353	0.0183	0.0067	0.0025	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.4060	0.0916	0.0404	0.0174	0.0030	0.0005	0.0001	0.0000
2	0.6767	0.2381	0.1247	0.0620	0.0138	0.0028	0.0005	0.0001
3	0.8571	0.4335	0.2650	0.1512	0.0424	0.0103	0.0023	0.0005
4	0.9473	0.6288	0.4405	0.2851	0.0996	0.0293	0.0076	0.0018
5	0.9834	0.7851	0.6160	0.4457	0.1912	0.0671	0.0203	0.0055
6	0.9955	0.8893	0.7622	0.6063	0.3134	0.1301	0.0458	0.0142
7	0.9989	0.9489	0.8666	0.7440	0.4530	0.2202	0.0895	0.0316

Tabelle 1: Werte der Verteilungsfunktion der Poissonverteilung