Prof. Dr. Z. Kabluchko
Philipp Godland

Wintersemester 2016/17
17. Oktober 2016

Mathematische Statistik

Übungsblatt 1

Abgabe: 24. Oktober 2016 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte)

(a) Sei $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\bar{x}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$. Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 + n(\bar{x}_n - a)^2.$$

(b) Sei $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ eine Stichprobe. Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $f(a) := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2$, $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das Minimum für $a = \bar{x}_n$ erreicht wird.

(c) Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $f(a) := \mathbb{E}[(X-a)^2]$, $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das Minimum für $a = \mathbb{E}X$ erreicht wird.

Aufgabe 2 (3+3 Punkte)

(a) Seien $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_i = \mu, \mathbb{E}Y_i = \nu$ und $\operatorname{Var} X_i = \operatorname{Var} Y_i = \sigma^2 < \infty$, wobei alle drei Parameter unbekannt seien. Wie üblich seien $\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ und $\bar{Y}_m := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m Y_i$. Betrachten Sie den Schätzer

$$T_{n,m} := C \cdot \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 + \sum_{j=1}^m (Y_j - \bar{Y}_m)^2 \right),$$

wobei $C > 0$ eine Konstante ist. Für welche Wahl von $C > 0$ ist $T_{n,m}$ erwartungstreu für σ^2? Begründen Sie Ihre Wahl.

(b) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit *bekanntem* Erwartungswert μ und unbekannter Varianz $\sigma^2 < \infty$. Für welche Wahl von C' ist der Schätzer

$$T_n := C' \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

erwartungstreu für σ^2? Begründen Sie Ihre Wahl.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Seien $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvektoren mit $\mathbb{E}[X_i^2] < \infty, \mathbb{E}[Y_i^2] < \infty$ und $\rho = \operatorname{Cov}(X_i, Y_i)$. Zeigen Sie, dass die sogenannte *empirische Kovarianz*

$$\hat{\rho}_n := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n)$$

ein erwartungstreuer und stark konsistenter Schätzer für die theoretische Kovarianz ρ ist, d.h.

$$\mathbb{E}\hat{\rho}_n = \rho \text{ und } \hat{\rho}_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \rho.$$