Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hendrik Flasche

Wintersemester 2015/2016
15. Dezember 2015

Stochastik

Übungsblatt 9

Abgabe: **12. Januar 2016** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (5 Punkte)

(a) Sei X eine absolut stetige Zufallsvariable mit Dichte f. Bestimmen Sie die Dichte von $\mu+\sigma X$, wobei $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

(b) Sei X gleichverteilt auf $[0,1]$. Welche Verteilung hat $-\log X$?

Aufgabe 2 (5 Punkte)

(a) Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion.

$$\mathbb{P}[X \leq t] = 1 - t^{-\alpha}, \quad t \geq 1,$$

wobei $\alpha > 0$ ein Parameter ist. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X]$.

(b) Eine Zufallsvariable Y heißt Gamma-verteilt mit Parametern $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, wenn die Dichte von Y die folgende Gestalt hat:

$$f_Y(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad t > 0,$$

(mit $f_Y(t) = 0$ für $t < 0$). Dabei ist Γ die Gammafunktion. Zeigen Sie, dass $\int_0^\infty f_Y(t)dt = 1$ und bestimmen Sie $\mathbb{E}[Y]$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

(a) Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen $F_1, \dots, F_n$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen von

$$M_n := \max\{X_1, \dots, X_n\} \text{ und } m_n := \min\{X_1, \dots, X_n\}.$$

(b) Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig mit $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1), \dots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda_n)$. Welche Verteilung hat $\min\{X_1, \dots, X_n\}$? *Freiwillig:* Haben Sie eine einfache stochastische Interpretation des Ergebnisses?

(c) Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig mit $X_1 \sim \mathrm{Exp}(1), \dots, X_n \sim \mathrm{Exp}(1)$. Sei $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Für $x \in \mathbb{R}$ bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[M_n \leq \log n + x\right]$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $\varepsilon > 0$ fest. Sei A die Menge aller Zahlen $x \in [0,1]$ mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt unendlich viele rationale Zahlen m/n (mit $m, n \in \mathbb{N}$), so dass

$$\left| x - \frac{m}{n} \right| \leq \frac{1}{n^{2+\varepsilon}}.$$

Bestimmen Sie das Lebesgue-Maß von A.

Aufgabe 5 (5 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum gegeben durch $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ und $\mathbb{P}[A] = \lambda(A)$. Sei weiter X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, definiert durch

$$X : \Omega \to \mathbb{R},\ X(\omega) := \sin(\pi\omega).$$

Bestimmen Sie die Dichte von X.

Aufgabe 6 (5 Punkte)
Sei $X_1, X_2, \ldots$ Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[X_i = 0] = \mathbb{P}[X_i = 1] = 1/2$ für alle $i \geq 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne M_n die Länge des längsten 1-Runs (d.h. einer Sequenz von aufeinanderfolgenden Einsen) in der Folge $X_1, \ldots, X_n$. Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[1 - \varepsilon < \frac{M_n}{\log_2 n} < 1 + \varepsilon\right] = 1.$$

$\log_2$ bezeichnet hierbei den Logarithmus zur Basis 2.

Beispiel für 1-*Run*: $M_{10} = 5$ für die Folge $0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1$.

Aufgabe 7 (6 Bonuspunkte)
Es gibt zwei identisch aussehende, geschlossene Schachteln mit Geld. Sie wissen nur, dass die Geldbeträge in den beiden Schachteln unterschiedlich sind. Sie dürfen eine der beiden Schachteln zufällig auswählen und öffnen. Nachdem Sie sich den Inhalt der Schachtel angeschaut haben, dürfen Sie entscheiden, ob Sie diese Schachtel behalten oder die andere wählen. Beschreiben Sie eine Strategie, mit der Sie erreichen können, dass die Wahrscheinlichkeit, am Ende den größeren der beiden Geldbeträge zu bekommen, **strikt** größer als 1/2 ist.

Hinweis. Diese Aufgabe können die meisten Stochastik-Professoren nicht lösen. Eine solche Strategie existiert.