Übungen

Abgabetermin: Dienstag 12.01.15, 12:15 Uhr, Briefkasten 146

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Es sei $(M_n)_{n\geq 0}$ eine positiv rekurrente DMK mit Zustandsraum $\mathcal{S}$ und eindeutiger stationärer Verteilung π. Ferner sei $g : \mathcal{S}^2 \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Zeigen Sie

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}_\pi g(M_0, M_k) \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{i\in\mathcal{S}}\sum_{j\in\mathcal{S}}\pi_i\pi_j g(i,j).$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Es sei $(M_n)_{n\geq 0}$ eine reversible MK mit Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j\in\mathcal{S}}$ und stationärer Verteilung π. Ferner sei A eine nichtleere Teilmenge von $\mathcal{S}$.

1. Definiere $\widetilde{P}_A = (\widetilde{p}_{ij})_{i,j\in A}$ durch

$$\widetilde{p}_{ij} \;=\; \begin{cases} p_{ij} & \text{falls } i \neq j \\ p_{ii} + \sum_{k\in A^c} p_{ik} & \text{falls } i = j. \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass $\widetilde{P}_A$ reversibel ist und bestimmen Sie die stationäre Verteilung $\widetilde{\pi}$. Welchen Übergangsmechanismus beschreibt $\widetilde{P}_A$ bezogen auf die Ausgangskette $(M_n)_{n\geq 0}$?

2. Angenommen $\sum_{k\in A} p_{ik} > 0$ für alle $i \in A$, definiere $P'_A = (p'_{ij})_{i,j\in A}$ durch

$$p'_{ij} \;=\; \frac{p_{ij}}{\sum_{k\in A} p_{ik}}.$$

   Zeigen Sie, dass P'_A reversibel ist und bestimmen Sie die stationäre Verteilung π'. Welchen Übergangsmechanismus beschreibt P'_A bezogen auf die Ausgangskette $(M_n)_{n\geq 0}$?

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (5 Punkte)
$(M_n)_{n\geq 0}$ sei eine MK auf $\mathbb{Z}$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{i,i-1} + p_{i,i} + p_{i,i+1} = 1 \text{ und } p_{i,i-1} \wedge p_{i,i+1} > 0$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$. Bestimmen Sie ein stationäres Maß.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Gegeben sei eine irreduzible MK mit ÜM P und Zustandsraum $\mathcal{S}$. Zeigen Sie: Existiert eine ÜM $P^* = (p^*_{ij})_{i,j\in\mathcal{S}}$ sowie ein Vektor $\pi := (\pi_i)_{i\in\mathcal{S}}$ nicht-negativer Zahlen mit $\sum_{i\in\mathcal{S}} \pi_i = 1$, so dass

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p^*_{ji},$$

dann ist π ein stationäres Maß für P und P^* die ÜM der Rückwärtskette.

Frohes Fest und einen guten Rutsch ins neue Jahr!