Institut für Mathematische Statistik

Alsmeyer/Buckmann: Markov-Ketten
WS 15/16, Blatt 8

Übungen

Abgabetermin: Dienstag 22.12.15, 12:15 Uhr, Briefkasten 146

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Es sei $(M_n)_{n\geq 0}$ eine ergodische DMK mit Zustandsraum $\mathcal{S}$ und stationärer Verteilung π. Zeigen Sie

$$\sup_{\lambda\in\mathcal{P}(\mathcal{S})} \| \mathbb{P}_\lambda^{M_n} - \pi \| \leq \left(1 - \sum_{j\in\mathcal{S}} \alpha_j^2\right)^{(n-n_0+1)/n_0}$$

für alle $n \geq 0$ und $n_0 \geq 1$, wobei $\alpha_j = \alpha(j, n_0) = \inf_{i\in\mathcal{S}} p_{ij}^{(n_0)}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Sei $(S_n)_{n\geq 0}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit

$$\mathbb{P}_i(X_1 = 1) = p \qquad \text{und} \qquad \mathbb{P}_i(X_1 = -1) = 1 - p$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass es für $p \neq \frac{1}{2}$ zwei stationäre Maße gibt, die, als Vektoren betrachtet, linear unabhängig sind.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Sei $(M_n)_{n\geq 0}$ eine DMK mit Zustandsraum $\mathbb{Z}$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{ij} := \begin{cases} q_i, & \text{falls } j = i + 1, \\ 1 - q_i, & \text{falls } j = i, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei jeweils $q_i > 0$. Zeigen Sie, dass $(M_n)_{n\geq 0}$ transient ist und ein essentiell eindeutiges stationäres Maß existiert.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Zeigen Sie: Ein Zustand $i \in \mathcal{S}$ ist genau dann null-rekurrent, wenn

$$\sum_{n\geq 0} p_{ii}^{(n)} \;=\; \infty \quad \text{und} \quad \text{C-}\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} \;=\; 0$$

gilt. In diesem Fall gilt weiter $\text{C-}\lim_{n\to\infty} p_{ji}^{(n)} = 0$ für alle $j \in \mathcal{S}$.