Übungen

Abgabetermin: Dienstag 08.01.15, 12:15 Uhr, Briefkasten 146

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Sei $(M_n)_{n\geq 0}$ eine DMK und $\mathfrak{R}$ die Menge ihrer positiv rekurrenten Zustände. Zeigen Sie, dass eine eindeutige stationäre Verteilung existiert, falls $\mathfrak{R}$ eine Klasse bildet.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Bei einem wiederholten Würfelwurf mit einem fairen Würfel bezeichne S_n die Gesamtanzahl der Augen bis zum n-ten Wurf.

a) Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \text{ ist durch 13 teilbar})$.

b) Ändert sich der Limes aus (a), wenn man mit zwei statt einem Würfel würfelt?

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Der Begriff *ergodisch* stammt aus der Ergodentheorie und der Zusammenhang zu ergodischen MK ist nicht schnell ersichtlich. Allerdings ist nach Problem 15 (Breiman: Probability, S. 120) ein stationärer, stochastischer Prozess $(X_n)_{n\geq 0}$ reellwertiger ZG genau dann ergodisch, wenn für alle $A \in \mathbb{B}^{\ell+1}$, $\ell \geq 0$,

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_A(X_k,\ldots,X_{k+\ell}) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{P}((X_0,\ldots,X_\ell)\in A) \quad \text{f.s.}$$

gilt. Nutzen Sie diese Aussage, um die Bezeichnung einer positiv rekurrenten, aperiodischen DMK $(M_n)_{n\geq 0}$ als ergodisch zu rechtfertigen.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $(M_{n:n+\ell})_{n\geq 0}$ eine positiv rekurrente, aperiodische DMK auf $\{(i_0,\ldots,i_\ell)\in\mathscr{S}^{\ell+1} : \mathbb{P}(M_0=i_0,\ldots,M_\ell=i_\ell)>0\}$ ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Es sei $(M_n)_{n\geq 0}$ eine positiv rekurrente Markov-Kette auf $\mathcal{S}$ mit stationärer Verteilung π. Für eine Teilmenge $A\subseteq\mathcal{S}$ und $n\geq 1$ sei

$$\sigma_n(A) \ = \ \inf\{k>\sigma_{n-1}(A) : M_k\in A\}$$

wobei $\sigma_0(A)=0$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_n(A)}{n} \ = \ \frac{1}{\sum_{i\in A}\pi_i} \quad \mathbb{P}_\lambda\text{-f.s.}$$

für jede Anfangsverteilung λ.