Institut für
Mathematische Statistik

Alsmeyer/Buckmann: Markov-Ketten
WS 15/16, Blatt 6

Übungen

Abgabetermin: Donnerstag 08.01.15, 12:15 Uhr, Briefkasten 146

Aufgabe 1 (5 Punkte)
N durchnumerierte Kugeln werden auf zwei Urnen A und B verteilt, und es bezeichne M_n die Anzahl der Kugeln in Urne A nach n Ziehungen. In jeder Ziehung wird gleichverteilt eine Kugel gewählt und mit Wkeit $1/2$ in Urne A bzw. B gelegt. Alle auftretenden Ziehungen seien dabei unabhängig voneinander.

a) Zeigen Sie, dass $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible, positiv rekurrente und aperiodische Markov-Kette auf $\mathcal{S} = \{0, \ldots, N\}$ ist und bestimmen Sie ihre Übergangsmatrix $\mathbf{P}$.

b) Zeigen Sie, dass es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{j\in\mathcal{S}} jp_{ij} = ai + b$ für alle $i \in \mathcal{S}$ gibt. Bestimmen Sie induktiv $\mathbb{E}_i M_n$, $n \in \mathbb{N}$, und damit $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_i M_n$.

c) Berechnen Sie die stationäre Verteilung für $\mathbf{P}$ und μ_{ii} für alle $i \in \mathcal{S}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Für eine positiv rekurrente DMK $(M_n)_{n\geq 0}$ mit stationärer Verteilung π sei Zeigen Sie

$$\mathbb{E}_\pi \tau(i) \;=\; \frac{\pi_i}{2}\, \mathbb{E}_i[\tau(i)(\tau(i) + 1)].$$

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, dass $\mathbb{E}_\pi f = \pi_i \mathbb{E}_i[\sum_{k=0}^{\tau(i)-1} f(M_k)]$ für jede nicht-negative, m.b. Funktion f gilt, und nutzen Sie diese Formel.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Sei $(M_n)_{n\geq 0}$ eine positiv rekurrente, aperiodische EMK. Zeigen Sie, dass ein $\rho \in (0, 1)$ existiert mit

$$\mathbb{P}_i(\tau(i) > n) \;\leq\; c\,\rho^n \qquad \text{für alle } n \geq 1.$$

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $p_{ji}^{(n)} > 0$ für alle $j \in \mathscr{S}$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Sei $(M_n)_{n\geq 0}$ eine EMK mit Zustandsraum $\mathscr{S}$, der in eine Menge $\mathfrak{T}$ tranisenter und eine Klasse $\mathfrak{R}$ aperiodischer, positiv rekurrenter Zustände zerfällt, wobei ferner $\mathbb{P}_i(\tau(\mathfrak{R}) < \infty) = 1$ für alle $i \in \mathfrak{T}$ gilt. Zeigen Sie, dass der Ergodensatz gültig bleibt, wobei $\pi(\mathfrak{T}) = 0$.