Übungen

Abgabetermin: Donnerstag 01.12.15, 12:15 Uhr, Briefkasten 146

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Es sei M_n die Anzahl von sich bewegenden Teilchen in einem festen Volumen. Wir nehmen an, dass im Zeitschritt $n \mapsto n+1$ jedes Teilchen mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ das Volumen verlässt und eine Poi(λ)-verteilte Anzahl neuer Teilchen von außen hinzukommt. Alle auftretenden Teilchenbewegungen seien dabei unabhängig voneinander. Zeigen Sie: $(M_n)_{n\geq 0}$ ist eine irreduzible Markov-Kette auf $\mathbb{N}_0$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{ij} \;=\; e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{i \wedge j} \binom{i}{k} (1-p)^k p^{i-k} \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!}$$

und stationärer Verteilung $\pi = \text{Poi}\left(\frac{\lambda}{p}\right)$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Sei $(M_n)_{n\geq 0}$ eine DMK mit endlichem Zustandsraum $\mathcal{S}$ und Übergangsmatrix $\mathbf{P}$. Definiere für $n \geq 1$ und eine beliebige Anfangsverteilung λ

$$\nu_n := \frac{1}{n}(\lambda + \lambda\mathbf{P} + \ldots \lambda\mathbf{P}^{n-1}).$$

Beweisen Sie die Existenz einer stationären Verteilung durch die folgenden Schritte:

a) Zeigen Sie für alle $n \geq 1$ und $s \in \mathcal{S}$

$$|\nu_n\mathbf{P}(s) - \nu_n(s)| \leq \frac{2}{n}.$$

b) Zeigen Sie die Existenz einer Teilfolge $(\nu_{n_k})_{k\geq 0}$, so dass $\lim_{k\to\infty} \nu_{n_k}(s)$ für alle $s \in \mathcal{S}$ existiert.

c) Zeigen Sie, dass $\nu = \lim_{k\to\infty} \nu_{n_k}$ eine stationäre Verteilung von $(M_n)_{n\geq 0}$ bildet.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Es sei $(M_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette auf $\mathbb{N}_0$ mit Übergangsmatrix P, gegeben durch $p_{00} = 1$ und $p_{ij} = e^{-i} \cdot \frac{i^j}{j!}$ für $i \geq 1$, $j \geq 0$.

a) Bestimmen Sie die Kommunikationsklassen, die Periode jedes Zustandes und entscheiden Sie, welche Zustände rekurrent bzw. transient sind.

b) Zeigen Sie, dass $(M_n)_{n\geq 0}$ unter jeder Anfangsverteilung λ mit $\sum_{i\geq 1} i\lambda_i < \infty$ ein Martingal ist.

c) Bestimmen Sie den $\mathbb{P}_\lambda$-fast sicheren Limes von $(M_n)_{n\geq 0}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Für eine Verteilung $(p_n)_{n\geq 0}$ auf $\mathbb{N}_0$ sei die Übergangsmatrix P auf $\mathbb{N}_0$ gegeben durch

$$p_{0j} = p_j \quad \text{und} \quad p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i} & \text{für } j = 0, \ldots, i-1 \\ 0 & \text{für } j \geq i \end{cases}$$

für alle $i \geq 1, j \geq 0$.

a) Unter welchen Bedingungen an $(p_n)_{n\geq 0}$ ist P irreduzibel und rekurrent?

b) Zeigen Sie: Ist π ein stationäres Maß für P, so gilt $\sum_{n\geq 1} \frac{\pi_n}{n} < \infty$.

c) Bestimmen Sie im Fall $p_0 = 0$, $p_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $n \geq 1$, ein stationäres Maß π für P. Ist die Kette positiv rekurrent?