Institut für Mathematische Statistik

Alsmeyer/Buckmann: Markov-Ketten
WS 15/16, Blatt 4

Übungen

Abgabetermin: Donnerstag 21.11.15, 12:15 Uhr, Briefkasten 146

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Gegeben sei die Übergangsmatrix auf $\mathcal{S} = \{1, \ldots, 8\}$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Zeichnen Sie den zugehörigen Übergangsgraphen und bestimmen Sie die Kommunikationsklassen, die Periode jedes Zustandes und die Menge der stationären Verteilungen.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Gegeben $i \in \mathcal{S}$, $\lambda \in \mathscr{P}(\mathcal{S})$ mit $\mathbb{P}_i(\tau(i) < \infty) > 0$ und $\mathbb{P}_\lambda(\tau(i) < \infty) > 0$. Dann gilt für jedes $n \geq 1$: Unter

$$\hat{\mathbb{P}}_{\lambda i}^{(n)} := \mathbb{P}_\lambda(\cdot\,|\sigma_n(i) < \infty)$$

sind $Z_0, \ldots, Z_{n-1}$ (s. VL) stochastisch unabhängig und $Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ ferner identisch verteilt mit

$$\hat{\mathbb{P}}_{\lambda i}^{(n)}(Z_1 \in \cdot) = \mathbb{P}_i(Z_0 \in \cdot\,|\tau(i) < \infty).$$

Bemerkung: Ist $\tau(i)$ sowohl unter $\mathbb{P}_i$ als auch unter $\mathbb{P}_\lambda$ f.s. endlich, d.h. $\hat{\mathbb{P}}_{\lambda i}^{(n)} = \mathbb{P}_\lambda$ für jedes $n \geq 1$, so bildet $(Z_n)_{n\geq 0}$ unter $\mathbb{P}_\lambda$ eine unabhängige Folge von Zufallsvariablen, die für $n \geq 1$ ferner identisch verteilt sind.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Gegeben sei eine DMK $(M_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $\mathcal{S}$ und $N(i) := \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{M_n = i\}}$. Zeigen Sie: Für alle $i, j \in \mathcal{S}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\mathbb{P}_j(N(i) = k) = \begin{cases} 1 - f_{ji}^*, & \text{falls } k = 0, \\ f_{ji}^*\, f_{ii}^{*\,k-1}(1 - f_{ii}^*), & \text{falls } k \geq 1 \end{cases}$$

für alle $j \in \mathcal{S}$. Für transientes $i \in \mathscr{S}$ ist $N(i)$ unter $\mathbb{P}_i$ also geometrisch verteilt mit Parameter $1 - f_{ii}^*$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Sei $(S_n)_{n\geq 0}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit

$$\mathbb{P}_0(X_1 = 1) = p,\ \mathbb{P}_0(X_1 = -1) = q \text{ und } \mathbb{P}_0(X_1 = 0) = 1 - p - q.$$

Definiere rekursiv

$$\tau_n := \inf\{k > \tau_{n-1} : S_k \neq S_{\tau_{n-1}}\},$$

wobei $\tau_0 := 0$. Zeigen Sie:

a) $(\tau_n - \tau_{n-1})_{n\geq 1}$ ist eine Folge von u.i.v. ZG mit

$$\mathbb{P}_0(\tau_1 = k) = (p+q)(1-p-q)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

b) Für $n \geq 1$ ist $S_{\tau_n} = \sum_{k=1}^{n} \hat{X}_k$ für u.i.v. ZG $\hat{X}_k$, $1 \leq k \leq n$, wobei

$$\mathbb{P}_0(\hat{X}_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}_0(\hat{X}_1 = -1) = \frac{p}{p+q}.$$