Übungen

Abgabetermin: Donnerstag 17.11.15, 12:15 Uhr, Briefkasten 146

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine u.i.v. Folge mit

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p.$$

für ein $p \in (0,1)$. Ferner seien $S_n = \sum_{i=0}^n X_i$ und $M_n = \max_{0\leq i\leq n} S_i$. Zeigen Sie:

a) $(M_n - S_n)_{n\geq 0}$ ist eine Markov-Kette. Bestimmen Sie auch die Übergangsmatrix.

b) $(M_n)_{n\geq 0}$ ist keine Markov-Kette.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Ein Fußballbildersammler möchte alle n Karten der aktuellen Bundesligasaison besitzen. Bei dem Kauf (einer einzelnen Karte) ist jede Karte gleich wahrscheinlich. Sei M_n die Anzahl an unterschiedlichen Karten, die der Sammler nach $n \in \mathbb{N}$ Käufen besitzt.

a) Zeigen Sie, dass $(M_n)_{n\geq 0}$ eine DMK ist.

b) Wie lange dauert es im Mittel bis der Sammler alle Karten besitzt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Gegeben sei eine diskrete Markov-Kette $(X_n)_{n\geq 0}$ auf $\mathcal{S}$ mit Übergangsmatrix P, die keine absorbierenden Zustände besitzt (d.h. $p_{ii} < 1$ für alle $i \in \mathcal{S}$). Für $\tau_0 = 0$ und

$$\tau_{n+1} := \inf\{k > \tau_n : X_k \neq X_{\tau_n}\}$$

definiere $Y_n := X_{\tau_n}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Zeigen Sie, dass $(Y_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette ist, und bestimmen Sie die Übergangsmatrix P'. Wie lässt sich die neue Kette informell beschreiben?

b) Es sei π ein stationäres Maß für P. Bestimmen Sie ein stationäres Maß für P'.

Aufgabe 4 (3 Punkte)
Sei $(M_n)_{n\geq 0}$ eine DMK mit stationärer Verteilung π. Zeigen Sie, dass $(M_n, M_{n+1})_{n\geq 0}$ eine DMK bildet und berechnen Sie eine zugehörige stationäre Verteilung.