| | |
|---|---|
| Institut für<br>Mathematische Statistik | Alsmeyer/Buckmann: Markov-Ketten<br>WS 15/16, Blatt 2 |

**Übungen**

Abgabetermin: Donnerstag 10.11.15, 12:15 Uhr, Briefkasten 146

**Aufgabe 1** (3 Punkte)
Sei $(M_n)_{n\geq 0}$ eine nicht-notwendig zeitlich homogene DMK. Zeigen Sie, $(M_n, n)_{n\geq 0}$ bildet eine zeitlich homogene DMK.

**Aufgabe 2** (5 Punkte)
Beweisen Sie Satz 1.28 aus der Vorlesung.

**Aufgabe 3** (4+1 Punkte)
Max Mustermann besitzt $r \geq 1$ Regenschirme, welche er für den Weg von zu Hause zur Arbeit bzw. den Rückweg benutzt. Regnet es beim Weggang aus der Wohnung bzw. der Arbeit, so nimmt Max einen Schirm mit, sofern einer vorhanden ist. Scheint die Sonne, so bleiben die Schirme, wo sie sind. Jedes Mal, wenn er die Wohnung bzw. die Arbeit verlässt, regnet es, unabhängig von allen anderen Zeitpunkten, mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$. Es sei $X_n$ die Anzahl an Schirmen an Max' Aufenthaltsort bevor er sich zum $n$-ten Mal auf den Weg macht.

a) Zeigen Sie, dass dieser Prozess eine homogene Markov-Kette ist, und bestimmen Sie die Übergangsmatrix sowie die stationäre Verteilung.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird Max langfristig nass?

**Aufgabe 4** (5 Punkte)
Gegeben sei eine Markov-Kette mit Zustandsraum $\mathbb{N}$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{1,1} = \frac{3}{4}, \qquad p_{i,i+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{i}{i+1}, \quad i \geq 1,$$
$$p_{i,i-1} = \frac{1}{2}, \quad i \geq 2, \qquad p_{i,i} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{i+1}, \quad i \geq 2.$$

Bestimmen Sie ein stationäres Maß für $P = (p_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ und zeigen Sie, dass es keine invariante Verteilung gibt.