Institut für
Mathematische Statistik

Alsmeyer/Buckmann: Markov-Ketten
WS 15/16, Blatt 10

Übungen

Abgabetermin: Dienstag 19.01.16, 12:15 Uhr, Briefkasten 146

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Sei $\mathcal{S}$ eine endliche Menge, P eine irreduzible, symmetrische ÜM auf $\mathcal{S}$ und π eine Verteilung auf $\mathcal{S}$ mit $\pi_i > 0$ für alle $i \in \mathcal{S}$. Wir definieren eine weitere ÜM $Q = (q_{ij})_{i,j\in\mathcal{S}}$ auf $\mathcal{S}$ durch

$$q_{ij} := \begin{cases} p_{ij}\big[1 \wedge (\pi_j/\pi_i)\big], & \text{falls } i \neq j, \\ 1 - \sum_{s\neq i} p_{is}\big[1 \wedge (\pi_j/\pi_i)\big], & \text{falls } i = j. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die durch Q definierte DMK die stationäre Verteilung π besitzt und im Gleichgewicht reversibel ist.

b) Sei π nicht die Gleichverteilung auf $\mathcal{S}$. Zeigen Sie, dass $q_{ii} > 0$ für ein $i \in \mathcal{S}$.
Hinweis: Beweisen Sie zunächst die Existenz eines $i \in E$ und $j \notin E$ mit $q_{ij} < p_{ij}$, wobei $E := \{i \in \mathcal{S} : \max_{j\in\mathcal{S}} \pi_j = \pi_i\}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

a) Gegeben sei eine MK auf einem endlichen Graphen G mit gewichteten Kanten, d.h. die Übergangswahrscheinlichkeiten sind durch

$$p_{ij} \;=\; \frac{w_{ij}}{\sum_{s\in G} w_{is}}$$

gegeben und $\sum_{s\in G} w_{is} > 0$ für alle $i \in G$. Ferner gelte $w_{ij} = w_{ji} \geq 0$ und $w_{ii} = 0$ für alle $i, j \in G$. Bestimmen Sie eine stationäre Verteilung von P. Ist die Kette reversibel?

b) Die Bewegung des Königs auf einem (ansonsten leeren) Schachbrett lässt sich durch eine DMK $(M_n)_{n\geq 0}$ auf $\mathcal{S} := \{1, \ldots, 64\}$ modellieren, wobei M_n die Position des Königs zum n-ten Zeitpunkt angibt und dieser sich gleichwahrscheinlich zu einem der benachbarten Felder bewegt. Ausgehend vom Feld $i \in \mathcal{S}$ gibt es N_i mögliche Nachbarfelder. Zeigen Sie, dass durch π, $\pi_i := N_i/420$ für $i \in \mathcal{S}$, die eindeutige stationäre Verteilung gegeben ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Es sei $(M_n)_{n\geq 0}$ eine positiv rekurrente DMK auf $\mathcal{S}\subset\mathbb{R}$ und $S_n := \sum_{k=1}^n M_k$ für $n \geq 1$. Ferner bezeichne $({}^{\#}M_n)_{n\geq 0}$ die zugehörige duale Kette, d.h. mit ÜM

$$^{\#}P := \left(\frac{\pi_i}{\pi_j}p_{ji}\right)_{i,j\in\mathcal{S}}.$$

Ferner bezeichne ${}^{\#}\tau(i)$ die zugehörige Rückkehrzeit zu $i \in \mathcal{S}$ und ${}^{\#}S_n := \sum_{k=0}^{n-1} {}^{\#}M_k$ für $n \geq 1$. Zeigen Sie

$$\mathbb{P}_i\Big(\min_{1\leq k\leq \tau(j)} S_k > 0, \tau(j) \leq \tau(i)\Big) = \frac{\pi_i}{\pi_j}\mathbb{P}_j\Big(\max_{1\leq k\leq {}^{\#}\tau(i)} {}^{\#}S_k = {}^{\#}S_{{}^{\#}\tau(i)} > 0, {}^{\#}\tau(i) \leq {}^{\#}\tau(j)\Big)$$

für beliebige $i, j \in \mathcal{S}$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Es sei $P = (p_{ij})_{i,j\in\mathcal{S}}$ eine positiv rekurrente ÜM auf $\mathcal{S} = \mathbb{N}_0$ oder $\mathcal{S} = \{0,\dots,N\}$ mit $p_{0j} > 0$ und $p_{j0} > 0$ für alle $j > 0$, $j \in \mathcal{S}$. Zeigen Sie: P ist genau dann reversibel, wenn

$$p_{ij}\,p_{jk}\,p_{ki} \;=\; p_{ik}\,p_{kj}\,p_{ji}$$

für alle $i, j, k \in \mathcal{S}$ gilt, d.h. der Pfad $i \to j \to k \to i$ wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorwärts wie rückwärts durchlaufen.