Institut für
Mathematische Statistik

Alsmeyer/Buckmann: Markov-Ketten
WS 15/16, Blatt 1

Übungen

Abgabetermin: Dienstag, 03.11.15, 12:15 Uhr, Briefkasten 146

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Es seien $(X_n)_{n\geq 0}$ und $(Y_n)_{n\geq 0}$ Zufallsvariablen mit Zustandsraum $(\mathcal{S},\mathfrak{S})$ und es sei $f:(\mathcal{S},\mathfrak{S})\to(\mathcal{S}',\mathfrak{S}')$ eine messbare Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $(X_n)_{n\geq 0}$ ist Markov-Kette $\Rightarrow (f(X_n))_{n\geq 0}$ ist Markov-Kette
2. $(X_n)_{n\geq 0}$ ist Markov-Kette und f ist injektiv $\Rightarrow (f(X_n))_{n\geq 0}$ ist Markov-Kette
3. $(X_n)_{n\geq 0}$ und $(Y_n)_{n\geq 0}$ sind Markov-Ketten $\Rightarrow ((X_n,Y_n))_{n\geq 0}$ ist Markov-Kette auf $(\mathcal{S}^2,\mathfrak{S}^2)$
4. $(X_n)_{n\geq 0}$ und $(Y_n)_{n\geq 0}$ sind stoch. unabhängige Markov-Ketten $\Rightarrow ((X_n,Y_n))_{n\geq 0}$ ist Markov-Kette auf $(\mathcal{S}^2,\mathfrak{S}^2)$

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Es seien $(X_n)_{n\geq 0}$ u.i.v. Zufallsgrößen mit $\mathbb{P}^{X_i}=p\delta_1+(1-p)\delta_{-1}$. Für welche $p\in[0,1]$ bildet $Y_n:=X_nX_{n+1}, n\in\mathbb{N}_0$, eine Markov-Kette?

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Sei $(M_n)_{n\geq 0}$ eine diskrete Markov-Kette mit Zustandsraum $(\mathcal{S},\mathfrak{S})$. Zeigen Sie

$$\mathbb{P}((M_n,\ldots,M_{n+k})\in\cdot|M_0,\ldots,M_n),(M_{n+k+\ell})_{\ell\geq 0})=\mathbb{P}((M_n,\ldots,M_{n+k})\in\cdot|M_n,M_{n+k}).$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Es sei $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ eine Filtration des messbaren Raumes $(\Omega,\mathfrak{A})$ und σ,τ Stoppzeiten bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Zeigen Sie:

1. $\{\sigma=\tau\},\{\sigma\leq\tau\}\in\mathcal{F}_\sigma\cap\mathcal{F}_\tau$
2. $\mathcal{F}_\tau\subseteq\mathcal{F}_\infty:=\sigma(\cup_{n\geq 0}\mathcal{F}_n)$