Übungen zur Finanzmathematik[1]

Abgabetermin: Freitag, 18. Dezember 2015, 12 Uhr. Briefkasten: 140, 148 bzw. 150
Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachten Sie einen arbitragefreien Finanzmarkt und sei $U : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Nutzenfunktion. Sei $\mathbf{Q}^* \in \mathcal{M}$ und $\lambda > 0$. Ist $I(\lambda \frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}^*}{\mathrm{d}\mathbf{P}})$ replizierbar, so ist

$$V^{(\lambda)} := I(\lambda \frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}^*}{\mathrm{d}\mathbf{P}})$$

das Endvermögen mit maximalen Nutzen mit endlichem Startvermögen

$$x^{(\lambda)} = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*}\left[I(\lambda \frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}^*}{\mathrm{d}\mathbf{P}}) \right].$$

Aufgabe 2 (Duales Problem) (4 Punkte)

Berechnen Sie gemäß Satz 5.17 jeweils eine konkave Funktion $U : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, die zu dem folgenden dualen Problem führt. Handelt es sich dabei wieder um Nutzenfunktionen im Sinne der Definition 5.1?

(a) $f(x) = x \log x$ (relative Entropie)

(b) $f(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{x})^2$ (Hellinger-Distanz)

(c) $f(x) = -\log x$ (umgekehrte relative Entropie)

Aufgabe 3 (Existenz der f-Projektion bei endlichem Grundraum) (5 Punkte)

Betrachten Sie einen endlichen arbitragefreien Finanzmarkt und eine konvexe Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(0) := \lim_{x \to 0} f(x) = \infty$. Wie üblich bezeichne $\mathcal{M}$ die Menge der äquivalenten Martingalmaße. Zeigen Sie, dass es eine f-Projektion von $\mathbf{P}$ auf $\mathcal{M}$ gibt, d.h. ein Maß $\mathbf{Q}^* \in \mathcal{M}$, so dass

$$f(\mathbf{Q}^* \| \mathbf{P}) = \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{M}} f(\mathbf{Q} \| \mathbf{P})$$

und das Infimum endlich ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass das Infimum auf dem Abschluss $\overline{\mathcal{M}}$ von $\mathcal{M}$ angenommen wird. Stellen Sie $\mathbf{Q} \in \overline{\mathcal{M}}$ mit Hilfe der Dichte $Z = \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ dar.

[1] Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite: `http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1516/FiMa`

Bemerkung: Es bezeichne f'_+ die rechtsseitige Ableitung von f. Sie erhalten bis zu 5 Bonuspunkte, wenn Sie die Aussage unter der allgemeineren Bedingung $-f'_+(0) := \lim_{x\to 0} -f'_+(x) = \infty$ statt $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ zeigen.

Aufgabe 4 (f-Projektion und optimale Handelsstrategie) (7 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ein Laplaceraum mit einem vierelementigen Grundraum $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_4\}$. Betrachten Sie einen diskontierten (1-Perioden) Finanzmarkt $(X_t)_{t\in\{0,1\}}$ bestehend aus zwei risikobehafteten Anlagen mit

$$(X_1 - X_0)(\omega_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, (X_1 - X_0)(\omega_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (X_1 - X_0)(\omega_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } (X_1 - X_0)(\omega_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Weiterhin sei $U : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ die HARA-Nutzenfunktion mit $\gamma = 1/2$, d.h.

$$U(x) = 2\sqrt{x}.$$

(a) Bestimmen Sie die Menge $\mathcal{M}$ der äquivalenten Martingalmaße.

(b) Bestimmen Sie für $\lambda > 0$ gemäß Satz 5.17 die f_λ-Projektion $\mathbf{Q}^*$ von $\mathbf{P}$ auf $\mathcal{M}$, den Startwert

$$x^{(\lambda)} = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*}\left[I(\lambda \frac{d\mathbf{Q}^*}{d\mathbf{P}}) \right]$$

und den optimalen erwarteten Nutzen

$$\mathbf{E}\left[U(I(\lambda \frac{d\mathbf{Q}^*}{d\mathbf{P}})) \right].$$

(c) Bestimmen Sie für beliebiges Anfangsvermögen $x > 0$ das Maximum

$$\max_{H\in\mathbb{R}^2} \mathbf{E}[U(x + H \cdot (X_1 - X_0))].$$

(d) Vergleichen Sie ihre Ergebnisse aus Teil (b) und (c) für ein gleiches Startvermögen $x = x^{(\lambda)}$.