Übungen zur Finanzmathematik[1]

Abgabetermin: Freitag, 11. Dezember 2015, 12 Uhr. Briefkasten: 140, 148 bzw. 150
Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 (Konvexe Optimierung, Teil 2) (5 Punkte)
Sei $\overline{S} = (S_t^0, S_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ ein arbitragefreier Finanzmarkt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und C ein europäisches Derivat.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{M}$ der äquivalenten Martingalmaße konvex ist.

(b) Nehmen Sie nun zusätzlich an, dass $\overline{S}$ ein endlicher Finanzmarkt ist. Fassen Sie Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ als Vektoren im $\mathbb{R}^{|\Omega|}$ auf und zeigen Sie, dass

$$\sup_{\mathbf{Q}\in\mathcal{M}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[C] = \max_{\mathbf{Q}\in\mathrm{ext}(\overline{\mathcal{M}})} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[C]\,.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die euklidische Norm strikt konvex ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Sei $\overline{S} = (S_t^0, S_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ ein arbitragefreier Finanzmarkt und $(C_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ ein amerikanisches Derivat. Ferner sei $\varphi : [0,\infty)^d \longrightarrow [0,\infty)$ eine konkave Funktion. Gilt

(a) $C_t = \varphi(X_t)$ für jedes $t \in \{0,\dots,T\}$ oder

(b) $\mathcal{C}_t = \varphi(S_t)$ für jedes $t \in \{0,\dots,T\}$, $\varphi(0) = 0$ und $(S_t^0)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ ist monoton wachsend,

so ist $\tau \equiv 0$ für jedes $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}$ eine $\mathbf{Q}$-optimale Stoppzeit des amerikanischen Derivats $(C_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Betrachten Sie einen arbitragefreien Finanzmarkt und sei $U : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Nutzenfunktion. Seien $x > 0$ und $V \in L^0_+$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(a) V ist das Ergebnis einer optimalen Stategie mit Startvermögen x

(b) Es gilt $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[V] \le x$ für alle $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}$ und

$$\mathbf{E}[U(V)] = \max\Big\{\mathbf{E}[U(\xi)] : \xi \in L^0_+ \text{ mit } \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\xi] \le x \text{ für alle } \mathbf{Q} \in \mathcal{M}\Big\}.$$

[1] Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite:
`http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1516/FiMa`

Die f-Divergenz kann auch für Maße $\mathbf{Q}$, die nicht absolutstetig bezüglich $\mathbf{P}$ sind, definiert werden. Hierzu benutzt man die *Lebesgue Zerlegung*. Man zerlegt das Maß $\mathbf{Q}$, wie in der nächsten Aufgabe beschrieben, in

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\mathrm{ac}} + \mathbf{Q}^{\mathrm{sing}}$$

und setzt

$$f(\mathbf{Q}\|\mathbf{P}) := \int f\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}^{\mathrm{ac}}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}\right)\,\mathrm{d}\mathbf{P} + \kappa \mathbf{Q}^{\mathrm{sing}}(\Omega),$$

wobei

$$\kappa = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Aufgabe 4 (Lebesgue Zerlegung) (5 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum mit einem endlichen Maß und ν ein weiteres endliches Maß $(\Omega, \mathcal{F})$.

(a) Zeigen Sie unter Benutzung des Satzes von Radon-Nikodým, dass zwei endliche Maße ν^{ac} und ν^{sing} auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit

$$\nu = \nu^{\mathrm{ac}} + \nu^{\mathrm{sing}}, \tag{8.1}$$

existieren, wobei

- ν^{ac} absolutstetig bezüglich μ ist und
- ν^{sing} singulär bezüglich μ ist, d.h. es existiert eine μ-Nullmenge N mit $\nu^{\mathrm{sing}}(N^c) = 0$.

(b) Zeigen Sie ferner, dass die Zerlegung (8.1) eindeutig ist.

Aufgabe 5 (Nikolausaufgabe) (3 Bonuspunkte)
Verarbeiten Sie diesen Zettel zu einem Weihnachtsstern.