Übungen zur Finanzmathematik[1]

Abgabetermin: Freitag, 27. November 2015, 12 Uhr. Briefkasten: 140, 148 bzw. 150
Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 (Amerikanischer Put im 1-Perioden Binomialmodell) (4 Punkte)
Betrachten Sie ein arbitragefreies Binomialmodell mit $T = 1$. Für welche Parameter s_0, K, u, d und r sollte man den amerikanischen Put mit $C_0^{\text{put}} \neq 0$ direkt einlösen?

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Sei $(C_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ ein amerikanisches Derivat mit oberer Snell-Einhüllenden $(U_t)_{\{0,\dots,T\}}$. Ferner sei $U_0 < \infty$. Zeigen Sie, dass eine Superreplikation mit Startvermögen U_0 existiert.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Seien $C = (C_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ ein amerikanisches Derivat auf einem arbitragefreien Finanzmarkt und $\Pi(C)$ die Menge der arbitragefreien Preise. Weiterhin bezeichne $\mathcal{T}$ die Menge der Stoppzeiten $\tau : \Omega \to \{0, \dots, T\}$ und

$$\pi_{min}(C) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \inf_{\mathbf{Q}\in\mathcal{M}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[C_\tau] \text{ und } \pi_{max}(C) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \sup_{\mathbf{Q}\in\mathcal{M}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[C_\tau].$$

Zeigen Sie, dass

$$(\pi_{min}(C), \pi_{max}(C)) \subset \Pi(C).$$

Aufgabe 4 (Endliche Finanzmarktmodelle und Bäume, Teil 2) (6 Punkte)
Betrachten Sie ein endliches Finanzmarktmodell. Wie in Aufgabe 3 des vorherigen Blattes assoziieren wir zur Filtration $(\mathcal{F}_t)_{\{0,\dots,T\}}$ einen Baum $\mathbb{T}$. Nun gehört zu den diskontierten Preisprozessen X der risikobehafteten Anlagen eine Abbildung $\mathfrak{X} : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^d$. Wir nennen Paare der Form $(T, \{\omega\}) \in \mathbb{T}$ *Blätter* und bezeichnen mit $\mathbb{T}^0$ die Menge aller Knoten von $\mathbb{T}$, die keine Blätter sind.

(a) Sei $\mathfrak{K} : \mathbb{E} \longrightarrow (0, 1]$ mit der Eigenschaft, dass für alle $v \in \mathbb{T}^0$

$$\sum_{\substack{w \\ w \text{ ist Kind von } v}} \mathfrak{K}(\langle v, w\rangle) = 1. \tag{6.1}$$

Zeigen Sie, dass durch

$$\mathbf{Q}(\{w\}) := \prod_{i=1}^{T} \mathfrak{K}(\langle v_{i-1}, v_i\rangle),$$

[1] Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite: `http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1516/FiMa`

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{F}$ definiert wird, wobei $(v_0, \ldots, v_T)$ der eindeutige wiederholungsfreie Pfad in $\mathbb{T}$ ist, welcher $(0, \Omega)$ mit $(T, \{\omega\})$ verbindet. Zeigen Sie, dass jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{Q}$ mit eindeutiger Nullmenge $\emptyset$ eindeutig in dieser Form dargestellt werden kann.

(b) Zeigen Sie, dass der Finanzmarkt genau dann arbitragefrei ist, wenn es eine Abbildung $\mathfrak{K} : \mathbb{T} \longrightarrow (0,1]$ gibt, welche (6.1) und

$$\sum_{\substack{w \\ w \text{ ist Kind von } v}} \mathfrak{K}(\langle v, w \rangle)\,(\mathfrak{X}(w) - \mathfrak{X}(v)) = 0$$

erfüllt.