Übungen zur Finanzmathematik[1]

Abgabetermin: Freitag, 6. November 2015, 12 Uhr. Briefkasten: 140, 148 bzw. 150
Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Seien $u > m > d > 0$, $r > -1$, $s_0 > 0$ und $p_1, p_2, p_3 > 0$ mit $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ bezeichne den Wahrscheinlichkeitsraum gegeben durch

$$\Omega = \{u, m, d\}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbf{P} = p_1\delta_u + p_2\delta_m + p_3\delta_d.$$

Ferner sei $\overline{S} = (B_t, S_t)_{t\in\{0,1\}}$ der Finanzmarkt gegeben durch

$$B_t = (1+r)^t \quad \text{und} \quad S_t(\omega) = \begin{cases} s_0 & t = 0 \\ s_0\omega & t = 1 \end{cases}$$

(a) Geben Sie die Menge der äquivalenten Martingalmaße an.

(b) Folgern Sie, dass der Finanzmarkt $\overline{S}$ genau dann arbitragefrei ist, wenn $d < 1 + r < u$.

(c) Konstruieren Sie für $1 + r \leq d$ und $1 + r \geq u$ jeweils eine Arbitrage.

(d) Berechnen Sie für ein Martingalmaß $\mathbf{Q}$ die Dichte bezüglich $\mathbf{P}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbf{Q}$ ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit Dichte Z bezüglich $\mathbf{P}$.

(a) Zeigen sie, dass für eine nichtnegative oder $\mathbf{Q}$-integrierbare Zufallsvariable Y gilt.

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[Y|\,\mathcal{G}\right] = \frac{1}{\mathbf{E}\left[Z|\,G\right]}\mathbf{E}\left[ZY|\,\mathcal{G}\right], \quad \mathbf{Q}\text{-fast sicher}$$

(b) Seien $(\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ eine Filtration auf $(\Omega, \mathcal{F})$ und $(Z_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ gegeben durch

$$Z_t = \mathbf{E}\left[Z|\,\mathcal{F}_t\right].$$

Zeigen Sie, dass ein $(\mathcal{F}_t)$-adaptierter stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ genau dann ein $\mathbf{Q}$-Martingal ist, wenn das Produkt $(X_tZ_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ ein $\mathbf{P}$-Martingal ist.

[1] Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite:
`http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1516/FiMa`

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für nichtnegative Zufallsvariablen Y_1, Y_2 gilt:

$$\forall A \in \mathcal{F} : \int_A Y_1 \mathrm{d}\mathbf{P} = \int_A Y_2 \mathrm{d}\mathbf{P} \quad \Longrightarrow \quad Y_1 = Y_2 \ \mathbf{P}\text{-fast sicher.}$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $\mathbf{Q}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ und (X_t) ein adaptierter $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozess. Dann ist $\mathbf{Q}$ ein Martingalmaß (d.h. unter $\mathbf{Q}$ ist jeder Prozess (X_t^i) ein $\mathbf{Q}$-Martingal) genau dann wenn für jeden beschränkten previsiblen $\mathbb{R}^d$-wertigen Prozess H der Gewinn $G_T(H)$ integrierbar ist und

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[G_T(H)\right] = 0.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Betrachten Sie einen arbitragefreien Finanzmarkt $\overline{S} = (S^0, S) = (S_t^0, S_t)_{t \in \{0,\dots,T\}}$. Seien $\overline{H}$ und $\overline{K}$ zwei selbstfinanzierende Handelsstrategien, so dass $V_T(\overline{H}) = V_T(\overline{K})$, $\mathbf{P}$-fast sicher. Zeigen Sie, dass für alle $t \in \{0, \dots, T\}$, $\mathbf{P}$-fast sicher,

$$V_t(\overline{H}) = V_t(\overline{K}).$$