Übungen zur Finanzmathematik[1]

Abgabetermin: Freitag, 30. Oktober 2015, 12 Uhr. Briefkasten: 148 bzw. 150
Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Beweisen Sie Lemma 1.15 aus der Vorlesung, d.h. dass eine Handelsstrategie $\overline{H} = (H^0, H)$ genau dann selbstfinanzierend ist, wenn für alle $t = 1, \dots, T$

$$V_t(\overline{H}) = V_0(\overline{H}) + \sum_{s=1}^{t} H_s \cdot (X_s - X_{s-1})$$

gilt.

Aufgabe 2 (8 Punkte)
Betrachten Sie das diskontierte CRR-Modell aus Beispiel 1.3 und 1.11.

(a) Seien $d < 1 + r < u$. Bestimmen Sie einen Parameter $p \in (0,1)$, sodass der diskontierte Preisprozess $(X_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ ein Martingal ist. Ist dieser Parameter eindeutig? Für welche $p \in (0,1)$ ist der Preisprozess $(X_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ ein Supermartingal bzw. ein Submartingal? Was passiert, wenn $1 + r$ nicht in (d, u) liegt?

(b) Stellen Sie für $S_0 = 125$, $T = 3$, $p = 0,75$, $u = 1,2$ und $d = 0.8$ den Preisprozess S als Binomialbaum dar und berechnen Sie mit diesem die Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}(S_3 = 216)$, $\mathbf{P}(S_3 = 144)$, $\mathbf{P}(S_3 = 96)$ und $\mathbf{P}(S_3 = 64)$.

(c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsgewichte des Preises S_t und des diskontierten Preises X_t (für das allgemeine Modell).

Aufgabe 3 (8 Punkte)
Seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbf{Q}$ ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit Dichte Z bezüglich $\mathbf{P}$, d.h. Z ist eine nichtnegative Zufallsvariable mit

$$\mathbf{Q}(A) = \int_A Z \, \mathrm{d}\mathbf{P} \quad \text{für } A \in \mathcal{F}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass Z $\mathbf{P}$-fast sicher eindeutig ist

(b) Zeigen Sie, dass Z $\mathbf{Q}$-fast sicher strikt positiv ist.

[1] Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite: `http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1516/FiMa`

(c) Zeigen Sie, dass genau dann $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{P}$ äquivalent sind, d.h. für $A \in \mathcal{F}$ gilt

$$\mathbf{Q}(A) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{P}(A) = 0,$$

wenn Z $\mathbf{P}$-fast sicher strikt positiv ist.

(d) Seien $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{P}$ äquivalent. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{Z}$ eine Dichte von $\mathbf{P}$ bezüglich $\mathbf{Q}$ ist.

(e) Sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine Teil-σ-Algebra. Zeigen Sie, dass das auf $\mathcal{G}$ eingeschränkte Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{Q}|_{\mathcal{G}}$ die Dichte $\mathbf{E}\,[Z|\,\mathcal{G}]$ bezüglich $\mathbf{P}|_{\mathcal{G}}$ besitzt.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für eine Zufallsvariable $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ gilt:

$$\forall A \in \mathcal{F} : \int_A X \mathrm{d}\mathbf{P} = 0 \quad \Longrightarrow \quad X = 0,\ \mathbf{P}\text{-fast sicher.}$$