

Übungen zur Finanzmathematik¹

Abgabetermin: Freitag, 5. Februar 2016, 12 Uhr. Briefkasten: 140, 148 bzw. 150
Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 (Explizite Bewertungsformeln im Black-Scholes Modell) (5 Bonuspunkte)

Seien $K > 0$. Geben Sie jeweils eine möglichst explizite Formel (entspr. Satz 7.16) für den Wert

(a) einer digitalen Option, welche 1 Euro ausschüttet, wenn der Wert der Aktie zur Maturität T über K liegt

(b) eines Straddle mit Ausübungspreis K

im Black-Scholes Modell an.

Aufgabe 2 (Black-Scholes Modell mit zwei risikobehafteten Anleihen) (7 Bonuspunkte)

Seien $W^{(1)} = (W_t^{(1)})_{t \in [0, T]}$ und $W^{(2)} = (W_t^{(2)})_{t \in [0, T]}$ unabhängige Brownsche Bewegungen mit Start in 0 auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und (\mathcal{F}_t) die von beiden Prozessen erzeugte Filtration, d.h.

$$\mathcal{F}_t = \sigma(W_s^{(1)}, W_s^{(2)} : s \in [0, t])$$

Ferner seien $s_0 > 0$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2^{(1)}, \sigma_2^{(2)} > 0$ und

$$\sigma_2 = \sqrt{(\sigma_2^{(1)})^2 + (\sigma_2^{(2)})^2}.$$

Wir betrachten das Black-Scholes Modell mit einer risikolosen Anlage $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$ gegeben durch

$$B_t = e^{rt}$$

sowie zwei riskobehafteten Aktien $S^{(1)} = (S_t^{(1)})_{t \in [0, T]}$ und $S^{(2)} = (S_t^{(2)})_{t \in [0, T]}$ gegeben durch

$$S_t^{(1)} = s_0 \exp\left(\sigma_1 W_t^{(1)} + \left(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)t\right) \quad \text{und} \quad S_t^{(2)} = s_0 \exp\left(\sigma_2^{(1)} W_t^{(1)} + \sigma_2^{(2)} W_t^{(2)} + \left(\mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)t\right).$$

Weiter bezeichnen $X^{(1)} = S^{(1)}/B$ und $X^{(2)} = S^{(2)}/B$ die zugehörigen diskontierten Prozesse.

(a) Berechnen Sie ein äquivalentes Martingalmaß \mathbf{Q} , d.h. ein zu \mathbf{P} äquivalentes Maß \mathbf{Q} unter dem die Prozesse $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ beide (\mathcal{F}_t) -Martingale sind.

(b) Betrachten Sie die Option, welche dem Käufer das Recht gibt zur Maturität T die erste Aktie gegen die zweite einzutauschen. Geben Sie einen Claim C an, welcher die Option adäquat beschreibt.

(c) Berechnen Sie eine explizite Formel (entspr. Satz 7.16) für den Wert von C .

¹Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite:
<http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1516/FiMa>