

Übungen zur Finanzmathematik¹

Abgabetermin: Freitag, 15. Januar 2016, 12 Uhr. Briefkasten: 140, 148 bzw. 150
Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Sei $W = (W_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit Start in 0 auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ die von W erzeugte Filtration, d.h.

$$\mathcal{F}_t = \sigma(W_s : s \in [0, t]).$$

Aufgabe 1 (Blumenthal'sches 0-1-Gesetz)

(5 Punkte)

Es bezeichne

$$\mathcal{F}_0^+ = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_\varepsilon.$$

Zeigen Sie, dass \mathcal{F}_0^+ eine \mathbf{P} -triviale σ -Algebra ist, d.h. es gilt

$$\forall A \in \mathcal{F}_0^+ : \quad \mathbf{P}(A) \in \{0, 1\}.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass \mathcal{F}_0^+ und $\sigma(\mathcal{F}_\varepsilon : \varepsilon > 0)$ unabhängig sind. Nutzen sie hierzu, dass für jedes $\varepsilon > 0$ die σ -Algebren $\sigma(W_{t+\varepsilon} - W_\varepsilon : t \geq 0)$ und \mathcal{F}_ε unabhängig sind.

Aufgabe 2 (Anwendung des Blumenthal'schen 0-1-Gesetzes)

(5 Punkte)

Zeigen Sie:

- (a) $\mathbf{P}(W \text{ ist monoton auf } [0, 1]) = 0$
- (b) $\mathbf{P}(W \text{ ist monoton auf } [r, s]) = 0$ für alle $s > r \geq 0$
- (c) $\mathbf{P}(\text{Es gibt ein Intervall } I \text{ auf dem } W \text{ monoton ist}) = 0$

Aufgabe 3 (*Wiederholung:* CRR-Modell)

(5 Punkte)

Zur Bewertung der Aktienanleihe Protect betrachten wir ein Einperioden ($T = 1$) CRR Modell mit Periodenlänge 9 Monaten, Anfangsaktienkurs $s_0 = 10$ und Sprunghöhen $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$. Ferner nehmen wir $r = \frac{6}{8}\%$ an.

- (a) Geben Sie den Claim C an, der die Aktienanleihe Protect im obigen Modell adäquat beschreibt.
- (b) Bestimmen Sie den arbitragefreien Preis der Aktienanleihe Protect in diesem Modell.

¹Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite:
<http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1516/FiMa>

Aufgabe 4 (*Wiederholung: Bewertungsformeln*) (5 Punkte)

Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ sei $(X_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$ ein diskontinuierter arbitragefreier Finanzmarkt mit diskretem Zustandsraum $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$ und kanonischer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$. Ferner sei $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}$ mit der Eigenschaft, dass $(X_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$ unter \mathbf{Q} eine Markov-Kette ist, d.h.

$$\mathbf{Q}(X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t, \dots, X_0 = x_0) = \mathbf{Q}(X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t)$$

für alle $x_{t+1}, \dots, x_0 \in \mathcal{X}$. Betrachten sie ein replizierbares europäisches Derivat der Form

$$C = f(X_T)$$

für eine messbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass es für alle $t \in \{0, \dots, T\}$ eine messbare Funktion $\pi_t : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[C | \mathcal{F}_t] = \pi_t(X_t), \quad \text{fast sicher.}$$

AKTIENANLEIHE PROTECT

AUF DIE AKTIE DER COMMERZBANK AG

WKN HV5AWH

Sichern Sie sich jetzt mit der Commerzbank attraktive Ertrags-Chancen!

Wenn Sie von der zukünftigen Entwicklung des bekannten DAX®-Unternehmens Commerzbank AG überzeugt sind, mögliche Kursverluste bis zu einer festgelegten Höhe aber abfedern möchten, dann sollten Sie sich die neue **Aktienanleihe Protect** der HypoVereinsbank näher ansehen.

Denn mit dieser Anleihe der HypoVereinsbank erhalten Sie zum Laufzeitende nach 9 Monaten einen attraktiven Kupon in Höhe von 10 % p. a. Zusätzlich schützt ein Sicherheitspuffer von 40 % zum Laufzeitende die Rückzahlung Ihres eingesetzten Nominalbetrags.

DAS BESONDERE

- 10 % p. a. Kuponzahlung zum Laufzeitende.
- 40%iger Sicherheitspuffer schützt am Laufzeitende vor möglichen Aktienkursrückgängen.
- Kurze Laufzeit von 9 Monaten.

Diese Details sprechen für sich

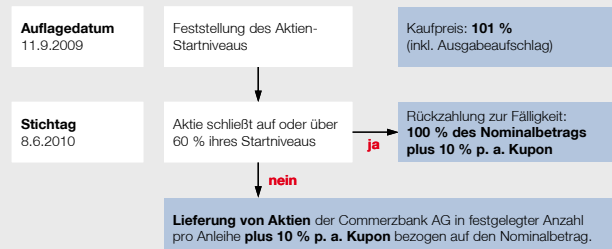
Am Auflagedatum, dem 11. September 2009, wird das Startniveau der Commerzbank-Aktie festgestellt und davon die 60 %-Sicherheitsschwelle berechnet.

Schließt die Aktie am Stichtag, dem 8. Juni 2010, auf oder über dieser Schwelle, erhalten Sie am Fälligkeitstag den Nominalbetrag plus eine Kuponzahlung in Höhe von 10 % p. a. je Anleihe zurückgezahlt. Schließt sie unter 60 % ihres Startniveaus, dann erfolgt die Rückzahlung durch Lieferung von Commerzbank-Aktien. Hierbei sind Kursverluste möglich. Die genaue Aktien-Stückzahl pro Anleihe wird dabei bereits zu Laufzeitbeginn festgelegt und errechnet sich wie folgt: Nominalbetrag / Aktien-Startniveau (Referenzpreis). Ein etwaiger Aktienbruchteil wird Ihnen ausbezahlt. Die Kuponzahlung von 10 % p. a. erhalten Sie zum Laufzeitende aber in jedem Fall.

**10 % p. a. Kupon
nach nur 9 Monaten –
mit der Commerzbank!**

Insgesamt ist Ihr Kapital 9 Monate investiert, wobei Sie die Anleihe unter normalen Marktbedingungen jederzeit liquide börslich und außerbörslich zum aktuellen Kurs veräußern können.

Die Funktionsweise



So könnte die Zukunft aussehen

Folgende Beispiele unter Annahme eines Aktien-Startniveaus von EUR 5,- verdeutlichen die mögliche Entwicklung einer Aktienanleihe Protect (Nominalbetrag EUR 1.000,-).

1. Zum Laufzeitende liegt die Aktie mit 5 % im Plus. Die Rückzahlung erfolgt zum vollen Nominalbetrag von EUR 1.000,- zuzüglich 10 % p. a. Kupon pro Anleihe.
2. Zum Laufzeitende liegt die Aktie mit 50 % im Plus. Auch hier erfolgt die Rückzahlung zum vollen Nominalbetrag von EUR 1.000,- zuzüglich 10 % p. a. Kupon pro Anleihe. Mit einem Direktinvestment in die Aktie wäre in diesem Fall ein höherer Ertrag erzielt worden.
3. Zum Laufzeitende liegt die Aktie mit 25 % im Minus. Die Rückzahlung erfolgt auch in diesem Fall zum vollen Nominalbetrag von EUR 1.000,- zuzüglich 10 % p. a. Kupon pro Anleihe.
4. Die Aktie liegt zum Laufzeitende mit 50 % im Minus. In diesem Fall erhalten Anleger 200 Aktien pro Anleihe geliefert (Nominalbetrag EUR 1.000,- / Aktien-Startniveau EUR 5,-). Der Kurs pro Aktie beträgt zu diesem Zeitpunkt noch EUR 2,50. Der Gesamtkurswert liegt also bei EUR 500,-. Auch hier erfolgt die Kuponzahlung von 10 % p. a. bezogen auf den Nominalbetrag.

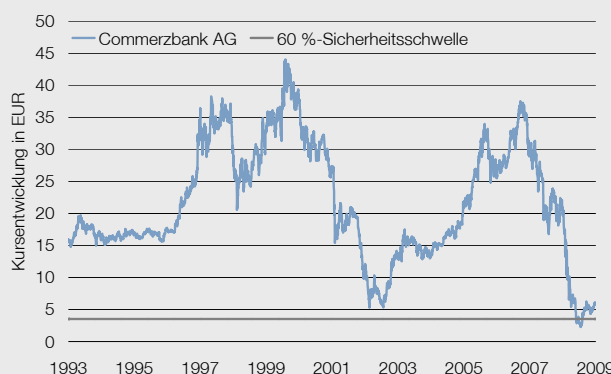
Commerzbank: Machen Sie sich ein Bild

Die Commerzbank versteht sich als kompetenter Dienstleister für Privat- und Geschäftskunden sowie für den Mittelstand, betreut aber auch zahlreiche große und multinationale Firmenkunden. Sie ist das zweitgrößte Kreditinstitut in Deutschland und hat mit der vollständigen Übernahme der Dresdner Bank im Januar 2009 ihre bedeutende Stellung als Privat- und Firmenkundenbank in Deutschland weiter gefestigt. In den nächsten Jahren dürfte die Integration der Dresdner Bank im Mittelpunkt stehen. In diesem Zusammenhang bleibt zu klären, ob die erwarteten Synergien erreicht werden und ob die in solchen Situationen typischen Integrationsrisiken kontrollierbar sind. Zur Stärkung ihrer Kapitalbasis erhielt die Commerzbank zwei Eigenkapitalspritzen in Höhe von EUR 18 Mrd. vom deutschen Finanzmarktstabilisierungsfonds (SoFFin).

Attraktive Absicherung für Sie

Für den Fall, dass sich die Aktie in den kommenden Monaten nach unten entwickelt, besteht zum Laufzeitende ein Sicherheitspuffer von 40 %. Solange die Aktie zu diesem Zeitpunkt auf oder über 60 % ihres Startniveaus schließt, ist Ihnen die 100%ige Rückzahlung des Nominalbetrags sicher. Aktuell festgelegt (Stand 18. August 2009), würde das Aktien-Startniveau bei EUR 5,915 und somit die 60 %-Sicherheitsschwelle bei EUR 3,549 liegen.

Historische Aktienkursentwicklung



Dargestellter Zeitraum: 19.8.1993–18.8.2009. Quelle: Bloomberg. Historische Betrachtungen stellen keine Garantie für zukünftige Entwicklungen dar.

Ihre Vorteile

- 10 % p. a. Kuponzahlung zum Laufzeitende.
- 40%iger Sicherheitspuffer schützt am Laufzeitende vor möglichen Aktienkursrückgängen.
- Kurze Laufzeit von 9 Monaten.
- Flexibel: Die Anleihe ist während der Laufzeit unter normalen Marktbedingungen börsentäglich liquide zum aktuellen Kurs handelbar.

Das sollten Sie beachten

- Der Investor trägt mit dem Kauf der Anleihe ein Aktienkursrisiko. Ein Verlust des eingesetzten Kapitals ist möglich.
- Die Ertragschance ist auf den Kupon in Höhe von 10 % p. a. bezogen auf den Nominalbetrag pro Anleihe begrenzt.
- Während der Laufzeit anfallende Dividenden stehen der Finanzierung des Ertragsmechanismus zur Verfügung und werden nicht an den Anleger ausgeschüttet.
- Die Anleihe ist während der Laufzeit Markteinflüssen (z. B. Aktienkursentwicklung, Zinsniveau, Volatilität, Dividendenerwartung, Bonitätseinschätzung der Emittentin) unterworfen. Kursverluste sind möglich. Der Kurs wird sich während der Laufzeit nicht oder nur selten genau auf dem Auszahlungsprofil bewegen. Dieses hat nur zum Laufzeitende Gültigkeit. Daher kann es sein, dass der Marktwert der Anleihe während der Laufzeit unter Umständen beträchtlich von der Aktienkursentwicklung des Basiswerts abweicht.
- Bei einem Verkauf während der Laufzeit treffen die dargestellten Szenarien nur eingeschränkt zu.
- Die Anleihe ist eine Inhaberschuldverschreibung, d. h. der Anleger trägt mit dem Kauf der Anleihe ein Emittentenrisiko. Bei einem Ausfall der Emittentin kann es daher unabhängig von der Entwicklung des Basiswertes zu Verlusten kommen. Als Inhaberschuldverschreibung unterliegt die Anleihe nicht der Einlagensicherung.
- Bei Kauf und Verkauf der Anleihe während der Laufzeit wird der Kupon als Stückzins ausgewiesen.
- Alle Ertrags- und Kuponangaben beziehen sich auf den Nominalbetrag von EUR 1.000,-. Eventuell anfallende Kosten (z. B. Transaktionskosten, Ausgabeaufschlag) können sich ertragsmindernd auswirken.

Steuerliche Behandlung

Zertifikate und Anleihen unterliegen der Abgeltungsteuer. Voraussetzung ist, dass der Anleger in Deutschland unbeschränkt steuerpflichtig ist und diese Papiere im Privatvermögen hält. Das bedeutet,

- dass anfallende Veräußerungs- oder Einlösungsgewinne im Rahmen des § 20 Abs. 2 S. 1 Nr. 7 EStG der Abgeltungsteuer auf Kapitalerträge in Höhe von 25 % zzgl. Solidaritätszuschlag und ggf. Kirchensteuer unterliegen. Realisierte Veräußerungs- oder Einlösungsverluste sind im Rahmen des § 20 Abs. 6 EStG mit sämtlichen Kapitalerträgen verrechenbar.
- dass während der Laufzeit des Zertifikats und der Anleihe anfallende Erträge nach § 20 Abs. 1 Nr. 7 EStG der Abgeltungsteuer auf Kapitalerträge in Höhe von 25 % zzgl. Solidaritätszuschlag und ggf. Kirchensteuer unterliegen.

Diese Aussagen sind allerdings nicht als Garantie für den Eintritt der dargestellten steuerlichen Folgen zu verstehen und sind abhängig von Ihren persönlichen Verhältnissen, die nicht geprüft wurden. Die Aussagen wurden weder durch die Rechtsprechung der Finanzgerichte noch durch ausdrückliche Äußerungen der Finanzverwaltung bestätigt. Außerdem kann die Rechtslage jederzeit durch eine neue Gesetzgebung, die in gewissen Grenzen auch Rückwirkung haben kann, verändert werden. Wir empfehlen die Einschaltung Ihres steuerlichen Beraters, insbesondere soweit es um die zukünftige steuerliche Entwicklung geht.



Deutscher Derivate Verband

Strukturierte Anlageprodukte der HVB tragen das Gütesiegel des Deutschen Derivate Verbands. Sie erfüllen den Derivate Kodex und bieten so dem Anleger Transparenz.

ZAHLEN, DATEN, FAKTEN

| | |
|-----------------------------------|---|
| Name | Aktienanleihe Protect |
| Emittentin | Bayerische Hypo- und Vereinsbank AG Aktuelle Informationen zur Bonitätseinschätzung (Rating) der Bayerischen Hypo- und Vereinsbank AG finden Sie unter www.hvb.de (Investor Relations). |
| Basiswert | Commerzbank AG, ISIN DE0008032004 |
| Typ | Anleihe |
| Zeichnungsfrist | 24.8.–11.9.2009 (14 Uhr) |
| Primärvaluta | 15.9.2009 |
| Fälligkeit | 15.6.2010 |
| Zinszahlungstag | 15.6.2010 |
| Anfänglicher Verkaufspreis | 101 % (inkl. Ausgabeaufschlag) |
| Nominalbetrag | EUR 1.000,– |
| Referenzpreis | Offizieller XETRA®-Schlussauktionskurs des Basiswertes vom 11.9.2009 |
| Sicherheitsschwelle | 60 % vom Referenzpreis |
| Feststellungstag | 8.6.2010 |
| Kupon | 10 % p. a. |
| Zinsmethode | Act./Act. ISDA (unadjusted, following) |
| Rückzahlung | 1) Wenn der offizielle XETRA®-Schlussauktionskurs des Basiswertes am Feststellungstag auf oder über der Sicherheitsschwelle liegt, wird die Anleihe zu 100 % des Nominalbetrags zurückgezahlt. 2) Wenn der offizielle XETRA®-Schlussauktionskurs des Basiswerts am Feststellungstag unterhalb der Sicherheitsschwelle liegt, erfolgt die Lieferung von Aktien der Commerzbank AG in festgelegter Anzahl je Nominalbetrag. Ein etwaiger Aktienbruchteil wird ausbezahlt. Wobei: $\text{Festgelegte Anzahl} = \frac{\text{Nominalbetrag EUR 1.000,–}}{\text{Referenzpreis}}$ |
| Börseneinführung | 29.9.2009, Freiverkehr Frankfurt, XETRA® (Scoach Premium), Stuttgart (EUWAX®) |
| WKN | HV5AWH |
| ISIN | DE000HV5AWH3 |

NOCH FRAGEN?

Unser **HVB Experten-Team** steht Ihnen gerne zur Verfügung:

- InfoLine: +49 (0)1803 131412*
- E-Mail: anleihen@unicreditgroup.de

Weitere Informationen erhalten Sie auch unter

- www.anleihen.hvb.de
- n-tv-Videotext S. 601
- auf Reuters HVCERT

Alle Angaben dienen nur der Unterstützung Ihrer selbstständigen Anlageentscheidung und können eine Aufklärung und Beratung durch Ihren Betreuer nicht ersetzen. Allein maßgeblich sind der Basisprospekt und die Endgültigen Bedingungen. Diese können Sie bei der Bayerischen Hypo- und Vereinsbank AG, Abteilung MCD1CS, Arabellastraße 12, D-81925 München, anfordern. Diese Information richtet sich nicht an natürliche oder juristische Personen, deren Wohn- bzw. Geschäftssitz einer ausländischen Rechtsordnung unterliegt, die für die Verbreitung derartiger Informationen Beschränkungen vorsieht. Insbesondere enthält diese Information weder ein Angebot noch eine Aufforderung zum Kauf von Wertpapieren an Staatsbürger der USA oder Großbritanniens oder der Länder im Europäischen Wirtschaftsraum, in denen die Voraussetzungen für ein öffentliches Angebot nicht erfüllt sind. Diese Information ist keine Finanzanalyse. Eine den gesetzlichen Anforderungen entsprechende Unvoreingenommenheit wird daher nicht gewährleistet. Es gibt auch kein Verbot des Handels – wie es vor der Veröffentlichung von Finanzanalysen gilt. EUWAX® ist ein eingetragenes Markenzeichen der Baden-Württembergischen Wertpapierbörse Stuttgart. XETRA® ist ein eingetragenes Markenzeichen der Deutschen Börse AG.

*Nur 9 Cent pro Minute aus dem deutschen Festnetz. Bei Anrufen aus Mobilfunk- oder anderen Netzen können abweichende Preise gelten.