# Übungen zur Finanzmathematik[1]

Abgabetermin: Freitag, 8. Januar 2016, 12 Uhr. Briefkasten: 140, 148 bzw. 150
Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Im Folgenden sei $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ stets eine Brownsche Bewegung mit Start in 0 und $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ die von $W$ erzeugte Filtration, d.h.

$$\mathcal{F}_t = \sigma(W_s : s \in [0,t]).$$

Ein $\mathbb{R}$-wertiger stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in I}$ heißt *Gauß'sch*, falls für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_n \in I$ der $n$-dimensionale Zufallsvektor $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ normalverteilt ist. Ferner nennen wir $(X_t)_{t\in I}$ *zentriert*, wenn $\mathbf{E}[X_t] = 0$ für jedes $t \in I$ gilt.

**Aufgabe 1** (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für einen stochastischen Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ (bzw. $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$) die folgenden Aussagen äquivalent sind

(a) $X$ ist eine Brownsche Bewegung mit Start in 0

(b) $X$ ist ein fast sicher stetiger, zentrierter, Gauß'scher Prozess mit

$$\mathrm{Cov}\left[X_s, X_t\right] = s \wedge t$$

für alle $s, t \in [0,\infty)$ (bzw. $s, t \in [0,T]$).

**Aufgabe 2** (5 + 3 Punkte)

Seien $s \in [0,T)$ und $c > 0$. Zeigen Sie, dass die folgenden Prozesse Brownsche Bewegungen mit Start in 0 sind.

(a) $(W_{s+t} - W_s)_{t\in[0,T-s]}$,

(b) $(-W_t)_{t\in[0,T]}$,

(c) $(cW_{\frac{t}{c^2}})_{t\in[0,Tc^2]}$ und

(d) $(\tilde{W}_t)_{t\in[0,T]}$ gegeben durch

$$\tilde{W}_t := \begin{cases} W_t, & t \leq s \\ 2W_s - W_t, & t \geq s. \end{cases}$$

**Bonusaufgaben:**

[1] Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite: `http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1516/FiMa`

(e) Zeigen Sie, dass der Prozess $(W_{s+t} - W_s)_{t\in[0,T-s]}$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$ ist.

(f) In der Vorlesung wurde eine Brownsche Bewegung $(B_t)_{t\in[0,1]}$ mit Start in 0 konstruiert. Zeigen Sie, dass für eine Folge unabhängiger Brownschen Bewegungen $((B_t^{(N)})_{t\in[0,1]} : N \in \mathbb{N})$ mit Start in 0, der Prozess $(B_t)_{t\geq 0}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} B_t &= B_{\lfloor t\rfloor} + B_{t-\lfloor t\rfloor}^{(\lceil t\rceil)} \qquad t > 0 \\ B_0 &= x \end{aligned}$$

eine Brownsche Bewegung mit Start in $x$ ist.

**Aufgabe 3** (5 + 2 Punkte)

Sei $\theta > 0$. Zeigen Sie, dass folgenden Prozesse $(\mathcal{F}_t)$-Martingale sind.

(a) $(W_t)_{t\in[0,T]}$,

(b) $(W_t^2 - t)_{t\in[0,T]}$ und

(c) $(\exp(\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t))_{t\in[0,T]}$

**Bonusaufgabe:**

(d) Geben Sie (mit Beweis) eine Funktion $\psi : [0,T] \longrightarrow (0,\infty)$ an, sodass der Prozess $(\psi(t)\cos W_t)_{t\in[0,T]}$ ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal ist.

**Aufgabe 4** (5 Punkte)

Seien $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbf{E}[I_1] = 0$ und $\mathrm{Var}\,[I_1] = 1$. Wir definieren für jedes $N \in \mathbb{N}$ den Prozess $(X_t^{(N)})_{t\geq 0}$

$$X_t^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left( \sum_{l=1}^{\lfloor tN\rfloor} I_l + (Nt - \lfloor Nt\rfloor)\, I_{\lceil tN\rceil} \right).$$

Zeigen Sie, dass für alle $0 \leq t_1 \leq \ldots, \leq t_n$

$$(X_{t_1}^{(N)}, \ldots, X_{t_n}^{(N)}) \Longrightarrow (W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$$

für $N \to \infty$.

**Hinweis:** Verwenden Sie den Satz von Slutzky zusammen mit dem zentralen Grenzwertsatz.