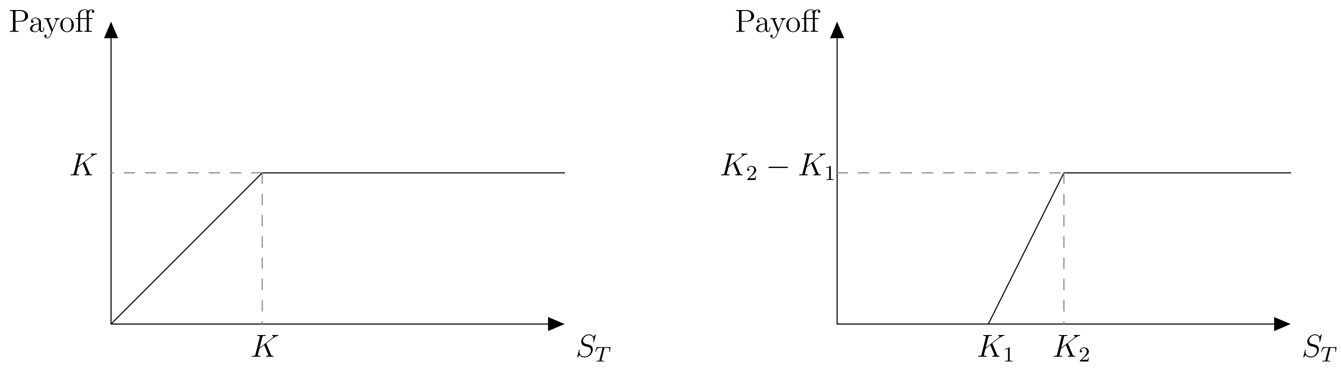
Übungen zur Finanzmathematik[1]

Abgabetermin: Freitag, 23. Oktober 2015, 12 Uhr. Briefkasten: 132
Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 (4 Punkte) Es bezeichne

- $C(t, T, K)$: den Preis des Call mit Maturität T und Strike K zur Zeit $t \leq T$,
- $B(t, T)$: den Preis des T-Bonds zur Zeit $t \leq T$.

Man stelle die Werte (zur Zeit $t \leq T$) der Derivate mit den folgenden Ausschüttungen zur Zeit T mithilfe des Aktienkurses S_t und beider obiger Finanzinstrumente dar.



(a) (b)

Hinweis: Ein Portfolio ohne Mittelzu-/abfluss, welches zur Zeit T den gleichen Wert hat wie das Derivat, hat jeweils auch zu vorhergehenden Zeiten den gleichen Wert. Ansonsten gäbe es Arbitragemöglichkeiten.

Aufgabe 2 (6 Punkte) Sei $C(t, T, K)$ der Preis eines Calls auf ein Underlying S mit Maturität T, Strike $K \geq 0$ zur Zeit t. Leiten Sie aus dem No-Arbitrage Prinzip die folgenden Abschätzungen her.

(a) $C(t, T, K) \leq S_t$

(b) Ist $0 \leq K_1 \leq K_2$, so ist $C(t, T, K_1) \geq C(t, T, K_2)$.

[1] Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite:
`http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1516/FiMa`

(c) $C(t,T,K) \geq (S_t - KB(t,T))^+$

(d) Sind $K_1 < K_2 < K_3$, so ist

$$C(t,T,K_2) \leq \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1} C(t,T,K_1) + \frac{K_2 - K_1}{K_3 - K_1} C(t,T,K_3).$$

Hinweis: Überlegen Sie sich jeweils unter der Annahme, dass die Ungleichung nicht gilt ein Portfolio, mit welchem man risikolos einen Gewinn erzielen kann (spätestens zur Maturität T).

Aufgabe 3 (5 Punkte) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, \mathbf{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Ferner sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$-adaptierter integrierbarer stochastischer Prozess. Zeigen Sie:

(a) Es existieren ein $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$-Martingal $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und ein $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$-previsibler Prozess $A = (A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $A_0 = 0$ sodass

$$X = M + A. \tag{1.1}$$

(b) Die Zerlegung (1.1) ist fast sicher eindeutig.